AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

Exámenes resueltos de Grado

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Índice general

Prólogo

En este documento se presentan los exámenes de la asignatura de Ampliación de Cálculo del Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales, desde el comienzo de la Titulación, en el curso académico 2011/12. Como puede observarse en el índice, hay ejercicios de diversos tipos.

En el curso hay dos convocatorias oficiales, una ordinaria (finales de mayo, primeros de junio) y una extraordinaria (finales de junio, primeros de julio). Para la convocatoria ordinaria puede optarse por Evaluación Continua o por Examen Final.

Durante los tres primeros cursos del grado, en la evaluación continua el profesor de cada grupo asignaba un porcentaje de la nota y el resto se repartía entre dos pruebas comunes: la Primera Prueba Común, aproximadamente a mitad de curso –de tipo test– y la Segunda Prueba Común –normalmente dos problemas– a final del curso y que coincide en fecha con el examen final de la asignatura –habitualmente, una prueba tipo test y un par de problemas–. A partir del curso 2014/15 hemos decidido suprimir la Primera Prueba Común, así pues los estudiantes de evaluación continua solo tendrán una prueba común (en el curso actual, 2017/18 con un valor del 50 %) y que será coincidente en fecha con el examen final de la convocatoria ordinaria.

Aquí se recogen todos los ejercicios de las pruebas comunes y exámenes tanto de convocatorias ordinarias como extraordinarias celebradas hasta el momento.

Esperamos que resulte de utilidad como material de trabajo.

Los Profesores de la Asignatura
Madrid, febrero de 2018

Curso 2011/12

Convocatoria ordinaria

EC. Primera prueba común

Pregunta 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, marcando con un aspa la opción que proceda.

1. Se cumplen las hipótesis para poder afirmar que
$$\int_{\partial\Omega} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy\,,$$
donde Ω está definido por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 10$, $\partial\Omega$ es la frontera de Ω orientada adecuadamente y
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \right)\,.$$
V ☐ F ☐

2. Se cumplen las hipótesis para poder afirmar que
$$\int_{\partial\Omega} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy\,,$$
donde Ω está definido por $(x-3)^2 + y^2 \leq 1$, $\partial\Omega$ es la frontera de Ω orientada adecuadamente y
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right)\,.$$
V ☐ F ☐

3. Se cumplen las hipótesis para poder aplicar el teorema de Green al campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2y, -xy^2)$ y la curva Γ con ecuación
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,,$$
recorrida desde el punto $(4,0)$ hasta el punto $(-4,0)$ en sentido contrario a las agujas del reloj.
V ☐ F ☐

4. Se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Green a la curva

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1\,, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

orientada adecuadamente, y al campo $\boldsymbol{F}(x, y) = (xy, xz, yz)$.

V ☐ F ☐

Pregunta 2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo y $\boldsymbol{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase 1 en Ω. Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$, se considera la ecuación:

$$\forall\,(x, y) \in \Omega : \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,. \tag{1}$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, marcando con un aspa la opción que proceda.

1. Si $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$ para toda curva de Jordan Γ contenida en Ω, entonces $\boldsymbol{F}$ verifica la igualdad (1) en Ω. V ☐ F ☐
2. Si $\boldsymbol{F}$ verifica la igualdad (1) en Ω, entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo en Ω. V ☐ F ☐
3. $\boldsymbol{F}$ admite potencial escalar en Ω si y solamente si $\boldsymbol{F}$ es conservativo en Ω. V ☐ F ☐
4. Si el conjunto Ω es, además, simplemente conexo, entonces para toda curva de Jordan Γ contenida en Ω se cumple $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$ si y solamente si $\boldsymbol{F}$ verifica la igualdad (1) en Ω.

   V ☐ F ☐

Pregunta 3. Se considera la circunferencia $C : x^2 + (y - M)^2 = 1$, donde M es el máximo dígito entre las unidades, decenas y centenas de su número de matrícula.

Sea I la circulación del campo $\boldsymbol{F}\,(x, y) = (x^2y, y^2x)$ sobre la curva C orientada positivamente. Sea J la integral doble

$$J = \iint_{x^2+(y-M)^2\leq 1} \left(x^2 - y^2\right) dxdy.$$

1. Determinar el número a tal que $I = aJ$. $a =$

2. Calcular el valor de I. $I =$

Pregunta 4. Se considera una circunferencia de radio R con densidad lineal de masa en cada punto igual a la distancia del punto a una recta fija que pasa por el centro de la circunferencia y es coplanaria con ella. Se pide hallar la masa de la circunferencia.

Masa de la circunferencia =

Pregunta 5. Sea el arco de curva parametrizado $\varphi(t) = (1 + \cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ((x-1)^2 + y^2, x^2 + y^2 + az^2, M)$ donde M es el máximo dígito entre las unidades, decenas y centenas de su número de matrícula.

1. Calcular el valor de a para el cual dicho campo es constante sobre la curva.

   $a =$

2. Para dicho valor de a, calcular la circulación I de $\boldsymbol{F}$ sobre el arco de curva.

   $I =$

Respuesta:

- **Pregunta 1.** 1.1. Verdadero. 1.2. Falso. 1.3. Falso. 1.4. Falso.
- **Pregunta 2.** 1.1. Verdadero. 1.2. Falso. 1.3. Verdadero. 1.4. Verdadero.
- **Pregunta 3.** 3.1. $a = -1$. 3.2. $I = M^2\pi$.
- **Pregunta 4.** Masa de la circunferencia $= 4\,R^2$.
- **Pregunta 5.** 5.1. $a = 1$. 5.2. $I = 2(M-1)$.

Examen final (EF) y segunda prueba común (EC)

Problema 1 (EC/EF)

Se considera la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$. Se pide:
1.- Calcular el área de la porción de superficie cónica Σ interior a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$ $(b > 0)$.
2.- Calcular el centroide de Σ.

Respuesta:

Resolvemos el problema por dos procedimientos: primero, proyectando Σ sobre el plano XY y segundo, parametrizando la superficie.

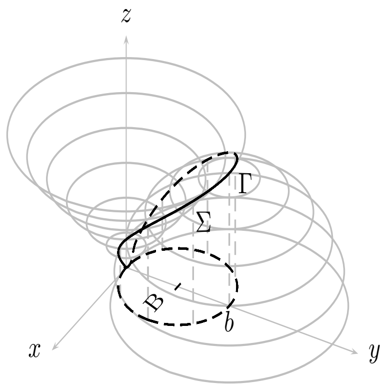
PRIMER MÉTODO:

1.- Calculamos los cosenos directores de Σ:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y} = \frac{\cos\gamma}{-z} &= \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2}} \\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \\
\Rightarrow \quad |\cos\gamma| &= \frac{|z|}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

La curva intersección de la superficie esférica y la superficie cónica es

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2by\,. \end{cases}$$



El cilindro que proyecta Γ sobre el plano XY se obtiene eliminando z en esas ecuaciones:

$$2x^2+2y^2 = 2by \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2 = by \quad\Leftrightarrow\quad x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}\,.$$

Por tanto, la proyección de Γ sobre el plano XY es la circunferencia

$$x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}\,.$$

Sea B el círculo

$$x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 \le \frac{b^2}{4}$$

y B' el semicírculo contenido en el semiplano $x \geq 0$.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \text{Área } (\Sigma) &= \iint_{\Sigma} d\sigma \\ &= \iint_{B} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \\ &= \sqrt{2}\iint_{B} dxdy \\ &= \sqrt{2} \text{ Área } (B) \\ &= \frac{\pi b^2\sqrt{2}}{4} . \end{aligned}$$

2.- Denotamos el centroide por (x_g, y_g, z_g).

Por simetría, $x_g = 0$.

Calculamos la integral de superficie

$$\begin{aligned} I :&= \iint_{\Sigma} y\, d\sigma \\ &= \iint_{B} y\,\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \\ &= \sqrt{2}\iint_{B} y\, dxdy \\ &= 2\sqrt{2}\iint_{B'} y\, dxdy \\ &= 2\sqrt{2}\iint_{B''} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho d\theta \qquad \text{(por cambio a coordenadas polares)} \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{b\operatorname{sen}\theta} \rho^2\, d\rho \end{aligned}$$

ya que, escribiendo B en coordenadas polares, se obtiene $\rho^2 \leq b\rho\operatorname{sen}\theta$ y el semicírculo en coordenadas polares está dado por

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq b\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

luego

$$
\begin{aligned}
I &= 2\sqrt{2}\,\frac{b^3}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta \\
&= \frac{b^3\sqrt{2}}{3}\,\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{b^3\sqrt{2}}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{b^3\sqrt{2}}{3}\,\frac{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{b^3\pi\sqrt{2}}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
y_g = \frac{I}{\text{Área }(\Sigma)} = \frac{b^3\pi\sqrt{2}}{8} : \frac{\pi b^2\sqrt{2}}{4} = \frac{b}{2}\,.
$$

Calculamos ahora la integral de superficie

$$\begin{aligned}
J &:= \iint_{\Sigma} z\, d\sigma \\
&= \iint_{B} \sqrt{x^2+y^2}\, \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \\
&= \sqrt{2} \iint_{B} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \\
&= 2\sqrt{2} \iint_{B'} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \\
&= 2\sqrt{2} \iint_{B''} \rho^2\, d\rho d\theta \qquad \text{(por cambio a coordenadas polares)} \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{b \operatorname{sen}\theta} \rho^2\, d\rho \\
&= \frac{2\sqrt{2}b^3}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}b^3}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}b^3}{3} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4b^3\sqrt{2}}{9}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z_g = \frac{J}{Area(\Sigma)} = \frac{4b^3\sqrt{2}}{9} : \frac{\pi b^2\sqrt{2}}{4} = \frac{16b}{9\pi}\,.$$

Luego el centroide de Σ es:

$$(x_g, y_g, z_g) = \left(0, \frac{b}{2}, \frac{16b}{9\pi}\right).$$

Segundo método:

1.- La curva intersección de la superficie esférica y la superficie cónica es

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2by\,. \end{cases}$$

El cilindro que proyecta Γ sobre el plano XY se obtiene eliminando z en esas ecuaciones:

$$2x^2+2y^2 = 2by \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = by \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}\,.$$

Por tanto, la proyección de Γ sobre el plano XY es la circunferencia

$$x^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}\,.$$

Una parametrización de la porción de superficie considerada está dada por $(D, \mathbf{\Sigma})$ siendo

$$\mathbf{\Sigma}(u,v) \equiv \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

y

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 \leq \frac{b^2}{4} \right\} .$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = \mathbf{\Sigma}'_u \times \mathbf{\Sigma}'_v &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{u\boldsymbol{i}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{v\boldsymbol{j}}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{k} , \end{aligned}$$

de donde

$$|\boldsymbol{n}|^2 = \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2} + 1 = 2 .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Área } (\Sigma) &= \iint_\Sigma d\sigma \\ &= \iint_D |\boldsymbol{n}| \, dudv \\ &= \sqrt{2} \iint_D dudv \\ &= \sqrt{2} \text{ Área } (D) \\ &= \frac{\pi b^2 \sqrt{2}}{4} . \end{aligned}$$

2.- Denotamos el centroide de Σ por (x_g, y_g, z_g) y el centroide de D por

$$(u_D, v_D) = \left(0, \frac{b}{2}\right) .$$

Por simetría, $x_g = 0$.

Calculamos la integral de superficie

$$\begin{aligned} I := & \iint_\Sigma y\, d\sigma \\ = & \iint_D v|\boldsymbol{n}|\, dudv \\ = & \sqrt{2} \iint_D v\, dudv \\ = & \sqrt{2}\ \text{Área}\ (D)\, v_D \\ = & \frac{\pi b^3 \sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

ya que

$$v_D = \frac{1}{\text{Área}\ (D)} \iint_D v\, dudv\,.$$

Por tanto,

$$y_g = \frac{I}{\text{Área}\ (\Sigma)} = \frac{b^3 \pi \sqrt{2}}{8} : \frac{\pi b^2 \sqrt{2}}{4} = \frac{b}{2}\,.$$

Calculamos ahora la integral de superficie

$$\begin{aligned} J := & \iint_\Sigma z\, d\sigma \\ = & \iint_D \sqrt{u^2+v^2}|\boldsymbol{n}|\, dudv \\ = & \sqrt{2} \iint_D \sqrt{u^2+v^2}\, dudv \\ = & \sqrt{2} \iint_{D'} \rho^2\, d\rho d\theta \qquad \text{(por cambio a coordenadas polares)} \\ = & \sqrt{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{b \operatorname{sen} \theta} \rho^2\, d\rho \end{aligned}$$

ya que el círculo D en coordenadas polares está dado por

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \rho \le b \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Por tanto,

$$J = \frac{b^3\sqrt{2}}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta\, d\theta = \frac{b^3\sqrt{2}}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta (1 - \cos^2 \theta)\, d\theta = \frac{b^3\sqrt{2}}{3} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4b^3\sqrt{2}}{9},$$

$$\Rightarrow \quad z_g = \frac{J}{\text{Área}\ (\Sigma)} = \frac{4b^3\sqrt{2}}{9} : \frac{\pi b^2 \sqrt{2}}{4} = \frac{16b}{9\pi}\,.$$

Luego el centroide de Σ es:

$$(x_g, y_g, z_g) = \left(0,\ \frac{b}{2}\,,\ \frac{16b}{9\pi}\right).$$

Problema 2 (EC/EF)

Sea Ω el conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ situado en el semiespacio $z \geq 0$ y limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 4$$

y $\Sigma = \partial\Omega$ la superficie frontera de Ω, orientada según el vector normal saliente. Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^3$.

1. La superficie Σ está formada por varias superficies regulares. Calcúlese el flujo de $\boldsymbol{F}$ que sale a través de cada una de ellas.

2. Sea Γ una curva sobre Σ cuyos extremos inicial y final son, respectivamente, $(0, 0, 4)$ y $(0, 0, 1)$. Calcúlese la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ.

Nota: Los resultados conocidos del campo $\boldsymbol{F}$ que se hayan visto durante el curso pueden enunciarse sin demostración.

Solución.

1. Σ está formada por tres superficies regulares: el disco $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq 1,\ z = 4\}$; la superficie cilíndrica $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 4\}$ y el casquete esférico $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$.

   El campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal y continuamente diferenciable en su dominio de definición $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, dado que $\boldsymbol{0} \notin \Omega$, puede aplicarse el teorema de Gauss y se concluye que

   $$\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} = \iint_D \boldsymbol{F} + \iint_C \boldsymbol{F} + \iint_Q \boldsymbol{F} = 0$$

   Basta entonces con calcular dos cualesquiera de los flujos salientes y despejar el tercero. Nosotros calcularemos los tres:

   a) Flujo que sale a través de D orientado por $\boldsymbol{k}$, con la parametrización natural $\psi_D(x, y) = (x, y, 4),\ x^2 + y^2 \leq 1$.

   $$\Phi_D := \iint_D \boldsymbol{F} = \iint_D \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{4}{(x^2 + y^2 + 16)^{3/2}} dxdy$$

   Calculamos esta última integral mediante un cambio de variables a polares,

   $$\Phi_D = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{4\rho}{(\rho^2 + 16)^{3/2}} d\rho d\theta = 8\pi\ \frac{-1}{(\rho^2 + 16)^{1/2}}\bigg|_0^1 = 8\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

b) Flujo que sale a través de C. Parametrizamos la superficie del cilindro mediante $\psi_C(t,\lambda) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \lambda)$, $(t,\lambda) \in [0,2\pi] \times [0,4]$, el vector normal asociado es:

$$\frac{\partial \psi_C}{\partial t} \times \frac{\partial \psi_C}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

Este vector normal, por ejemplo en $t = 0$ es (1,0,0) que, efectivamente, apunta hacia el exterior de la cara cilíndrica. Calculemos el flujo,

$$\Phi_C := \iint_C \boldsymbol{F} = \iint_{[0,2\pi]\times[0,4]} \frac{1}{(\lambda^2+1)^{3/2}} dt d\lambda = 2\pi \int_0^4 \frac{d\lambda}{(\lambda^2+1)^{3/2}}$$

Calculamos esta última integral mediante el cambio de variable $u \mapsto \lambda = \operatorname{sh} u$ que transforma el intervalo $[0, \operatorname{sh}^{-1} 4]$ en $[0,4]$,

$$\int_0^4 \frac{d\lambda}{(\lambda^2+1)^{3/2}} = \int_0^{\operatorname{sh}^{-1} 4} \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u\big|_0^{\operatorname{sh}^{-1} 4} = \frac{4}{\sqrt{17}},$$

con lo que

$$\Phi_C = \frac{8\pi}{\sqrt{17}}.$$

c) Flujo que sale a través de Q. El vector normal exterior unitario del casquete como parte de la superficie Σ es $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}$, por tanto:

$$\Phi_Q := \iint_Q \boldsymbol{F} = \iint_Q \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} \cdot (-\boldsymbol{r}) d\sigma = -A(Q) = -2\pi.$$

donde se ha tenido en cuenta que la altura y el radio del casquete son ambos iguales 1.

Naturalmente la suma de los tres flujos es nula:

$$\Phi_D + \Phi_C + \Phi_Q = 8\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + \frac{8\pi}{\sqrt{17}} - 2\pi = 0.$$

2. El campo $\boldsymbol{F}$ es irrotacional en su dominio de definición, que es simplemente conexo, por lo tanto es conservativo. Vamos a calcular la circulación por dos procedimientos:

   a) Es conocido que un potencial escalar del campo $\boldsymbol{F}$ es $f(\boldsymbol{r}) = -\|\boldsymbol{r}\|^{-1}$, entonces

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} = \int_\Gamma \nabla f = f(0,0,1) - f(0,0,4) = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

b) La circulación a lo largo de Γ depende exclusivamente de los extremos inicial y final de la curva. Podemos escoger cualquier curva con esos extremos que no pase por el origen, no es necesario que esté sobre la superficie Σ; la más sencilla es el segmento orientado $S = [(0,0,4),(0,0,1)]$ que puede parametrizarse en el intervalo $[0,3]$ mediante $\boldsymbol{r}(t) = (0,0,4-t)$. De esta forma:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{F} = \int_0^3 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \int_0^3 \frac{-1}{(4-t)^2} dt = -\frac{3}{4}.$$

Observemos que este procedimiento puede interpretarse como una aplicación del teorema de Stokes, como sigue:

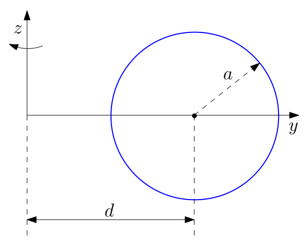
Sea $S^- = [(0,0,1),(0,0,4)]$ el segmento del apartado anterior pero con el sentido de recorrido opuesto; la curva $\Gamma \cup S^-$ es cerrada; tiéndase sobre ella una superficie M orientada coherentemente y que no pase por el origen, en virtud del teorema de Stokes:

$$\int_{\Gamma\cup S^-} \boldsymbol{F} = \int_\Gamma \boldsymbol{F} + \int_{S^-} \boldsymbol{F} = \iint_M \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \int_\Gamma \boldsymbol{F} = -\int_{S^-} \boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{F}.$$

Problema 3 (EF)

Este problema consta de dos apartados independientes:

3.1. Se considera el toro sólido engendrado cuando el disco de la figura, situada en el plano YZ, gira alrededor del eje z



La densidad volumétrica de masa (kg/m^3) en cada punto del toro es proporcional a la distancia de dicho punto al plano XY, siendo K la constante de proporcionalidad. Se pide calcular la masa del toro.

3.2. (A) En lo sucesivo, Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial **de clase 1** definido en Ω. Estudiar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados.
Nota: Para que la respuesta se considere correcta, en caso de ser cierto un enunciado se debe razonar adecuadamente su veracidad (por ejemplo enunciado el resultado o teorema que se esté utilizando). En caso de ser falso, se debe razonar adecuadamente su falsedad (por ejemplo proporcionando un contraejemplo). Se supone que todas las curvas y superficies que aparecen son de clase 1.

1. Si $\boldsymbol{F}$ es irrotacional en Ω entonces la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier curva cerrada contenida en Ω es cero.

2. Si Σ es una superficie cerrada contenida en Ω, se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en el interior de Σ (se supone que Σ está orientada según la normal saliente al interior de Σ).

3. Sea Γ una curva cerrada contenida en Ω. Sea Σ una superficie cuyo borde es Γ y tal que Γ y Σ están orientadas de forma coherente. Entonces se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Stokes a $\boldsymbol{F}$ y Σ.

4. Sea ϕ un campo escalar de clase 2 definido en Ω y del que se sabe que es armónico. Sea A un conjunto contenido en Ω cuya frontera es una superficie Σ que suponemos orientada con la normal entrante a A. Entonces se puede asegurar que el flujo de $\operatorname{grad}\phi$ sobre Σ es nulo.

5. Si $\boldsymbol{F}$ admite un potencial vector en Ω entonces Ω es estrellado y $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en Ω.

Solución al apartado 3.1. Por definición, la masa pedida está dada por

$$M = \iiint_T \rho\,(x, y, z)\, dxdydz$$

donde ρ denota la función densidad. Puesto que la distancia de un punto al plano XY es $|z|$ (nótese la importancia del valor absoluto) tenemos

$$\rho\,(x, y, z) = K\,|z|$$

donde K tiene unidades de kg/m^4. Por ello

$$M = K \iiint_T |z|\, dxdydz$$

Como T está acotado y es medible Jordan (es decir, es un conjunto sobre el que tiene sentido integrar) y la función $|z|$ es continua y por ello acotada en T, la integral triple existe en sentido propio.

Puesto que la función $|z|$ es par en z, par en y y par en z y puesto que el toro es simétrico respecto de los tres planos coordenados, tenemos

$$M = 8K \iiint_{T^*} zdxdydz$$

donde T^* es la porción del toro contenida en el primer octante y donde hemos suprimido el valor absoluto porque en dicho octante z es no negativa.

Obsérvese que si hubiésemos escrito (de manera incorrecta) que $\rho(x, y, z) = Kz$ (es decir, sin el valor absoluto) tendríamos que la integral resultante

$$K \iiint_T z dx dy dz$$

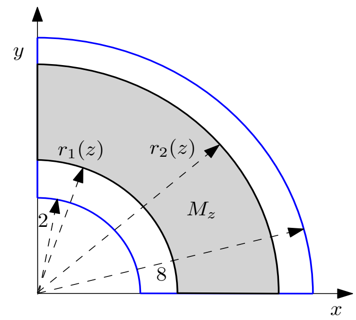
valdría cero, pues T es simétrico respecto del plano $z = 0$ y la función subintegral es impar en z. Puesto que la masa de un cuerpo con volumen positivo no puede ser cero, esto nos debería hacer reflexionar y darnos cuenta del error que hemos cometido.

Para calcular la integral en principio se puden seguir distintos procedimientos. A continuación veremos tres de ellos:

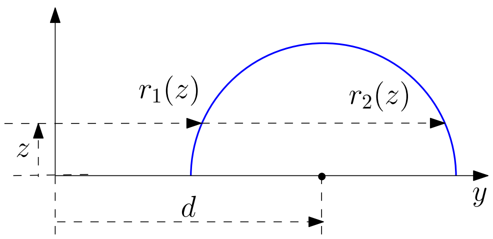
Método I. Para llevar a cabo la integración fijamos primero la z e integramos en XY. Entonces tenemos

$$M = 8K \int_0^a z \left(\iint_{M_z} dx dy \right) dz$$

donde M_z es el recinto plano correspondiente a la intersección de T^* con un plano paralelo al XY trazado a altura z.



M_z es una porción de corona circular con radio interno y externo $r_1(z)$ y $r_2(z)$. Claramente, estos radios serán función de z. Para calcular $r_1(z)$ y $r_2(z)$ basta acudir la siguiente figura



Para cada z estamos buscando los dos valores de y sobre la circunferencia. La ecuación de la circunferencia (en el plano YZ) es

$$(y - d)^2 + z^2 = a^2$$

con lo que tenemos, despejando y,

$$r_1(z) = d - \sqrt{a^2 - z^2}$$
$$r_2(z) = d + \sqrt{a^2 - z^2}$$

Por otro lado, $\iint_{M_z} dydz$ es el área de M_z, es decir,

$$\iint_{M_z} dxdy = \text{Área}(M_z) = \frac{\pi}{4}\left(r_2^2(z) - r_1^2(z)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\left(d+\sqrt{a^2-z^2}\right)^2 - \left(d-\sqrt{a^2-z^2}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4}4d\sqrt{a^2-z^2} = \pi d\sqrt{a^2-z^2}$$

Por lo tanto,

$$M = 8K\int_0^a z\left(\iint_{M_z} dxdy\right)dz = 8\pi Kd\int_0^a z\sqrt{a^2-z^2}dz =$$
$$8\pi Kd\left(\frac{1}{2}\frac{(a^2-z^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_{z=a}^{z=0}\right) = \frac{8}{3}\pi Kda^3$$

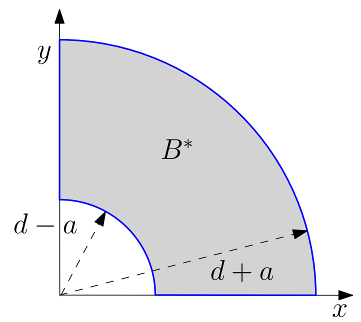
que es el resultado buscado. Obsérvese que, como K tiene unidades de kg/m^4 y a y d unidades de longitud, el resultado tiene, como debe ser, unidades de masa.

Hay que hacer constar que el método seguido es esencialmente equivalente a hacer un cambio a cilíndricas e integrar primero en ρ y θ y luego en z.

Método II. Otra posibilidad para llevar a cabo la integración es fijar primero x e y e integrar en z. Entonces tenemos

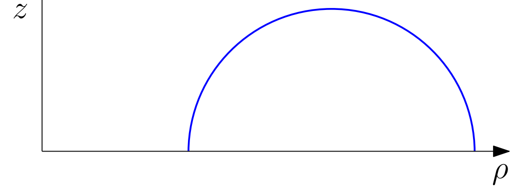
$$M = 8K\iiint_{T^*} zdxdydz = 8K\iint_{B^*}\left(\int_0^{h(x,y)} zdz\right)dxdy = 8K\iint_{B^*}\frac{1}{2}h(x,y)^2dxdy$$

donde B^* es la proyección de T^* sobre el plano XY



y donde $z = h(x,y)$ es la ecuación de la superficie del toro en el primer octante. La ecuación de la superficie tórica se puede sacar considerando la sección del toro con un plano que contenga al eje z

$$(\rho - d)^2 + z^2 = a^2$$



Si llamamos ρ a la distancia al origen, es decir, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ tenemos que la ecuación de la circunferencia en el plano ρz es

$$(\rho - d)^2 + z^2 = a^2$$

con lo que la ecuación de la superficie tórica es

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 + z^2 = a^2$$

Por lo tanto, en el primer octante

$$z = h(x,y) = \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M &= 4K \iint_{B^*} h^2(x,y)dxdy = 4K \iint_{B^*} \left(a^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2\right) dxdy = \\ &= 4Ka^2 \iint_{B^*} dxdy - 4K \underbrace{\iint_{B^*} \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 dxdy}_{\substack{\parallel \\ J}} = 4Ka^2 \text{Área}(B^*) - 4KJ = \\ &= 4Ka^2 \frac{\pi}{4}\left((d+a)^2 - (d-a)^2\right) - 4KJ = 4\pi K d a^3 - 4KJ \end{aligned}$$

Para calcular J hacemos un cambio a polares

$$\begin{aligned} J &= \iint_{B^*} \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{d-a}^{d+a} (\rho - d)^2 \rho d\rho d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{d-a}^{d+a} (\rho - d)^2 \rho d\rho \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio } \rho - d = u}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{-a}^{a} u^2 (d+u)\, du = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^{a} \left(du^2 + u^3\right) du = \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^a 2du^2 du = \frac{\pi}{3} da^3 \end{aligned}$$

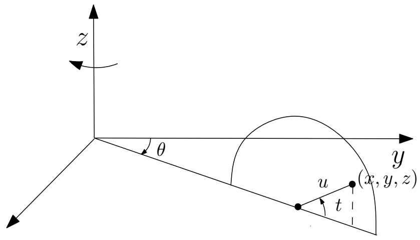
con lo que

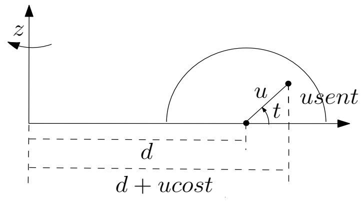
$$M = 4\pi K d a^3 - 4KJ = \frac{8}{3}\pi K d a^3$$

Hay que hacer constar que el método seguido es esencialmente equivalente a hacer un cambio a cilíndricas e integrar primero en z y luego en ρ y θ.

Método III. Utilizaremos que el sólido T^* se puede parametrizar usando 3 variables que tienen una interpretación geométrica muy clara y usaremos dicha parametrización para hacer un cambio de variable que transforme el toro en un rectángulo.

Consideremos las variables θ, u y t definidas en la siguiente figuras:





Usando las 3 variables anteriores, los puntos de T^* se pueden describir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= (d + u\cos t)\operatorname{sen}\theta \\ x &= (d + u\cos t)\cos\theta \quad ; \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ u \in [0, a],\ t \in [0, \pi] \\ z &= u\operatorname{sen} t \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora introducimos el cambio de variable $(x, y, z) = \phi(\theta, u, t)$ definido por (2). Claramente $\phi^{-1}(T^*) = B$ donde $B := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, a] \times [0, \pi]$.

El cambio es de clase 1 y el jacobiano del cambio vale

$$\begin{aligned} J\phi(\theta, u, t) &= \det \begin{pmatrix} (d + u\cos t)\cos\theta & \cos t\operatorname{sen}\theta & -u\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta \\ -(d + u\cos t)\operatorname{sen}\theta & \cos t\cos\theta & -u\operatorname{sen} t\cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen} t & u\cos t \end{pmatrix} = \\ &= (d + u\cos t)\, u \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos t\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos t\cos\theta & -\operatorname{sen} t\cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} = \\ &= (d + u\cos t)\, u \left(\cos^2\theta\cos^2 t + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2 t + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2 t\right) = \\ &= (d + u\cos t)\, u \left(\cos^2\theta\left[\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right] + \operatorname{sen}^2\theta\left[\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right]\right) = \\ &= (d + u\cos t)\, u \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = (d + u\cos t)\, u \end{aligned}$$

que sólo se anula en la frontera de B. Además el cambio es inyectivo salvo en la frontera de B con lo que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de cambio de variable en integrales múltiples.

Como $(d + u\cos t)$ y u son no negativos, entonces $J\phi(\theta, u, t) \geq 0$ y entonces

$$|J\phi(\theta, u, t)| = (d + u\cos t)\, u$$

Así

$$M = 8K \iiint_{T^*} z dx dy dz = 8K \iiint_B (u \operatorname{sen} t)(u(d + u\cos t))\, du dt d\theta =$$

$$= 8K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \left(du^2 \operatorname{sen} t + u^3 \operatorname{sen} t \cos t \right) du dt d\theta =$$

$$= 8K \frac{\pi}{2} \int_0^a \left(du^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t dt}_{\substack{\parallel \\ 2}} + u^3 \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt}_{\substack{\parallel \\ 0}} \right) du =$$

$$= 8K \frac{\pi}{2} 2d \int_0^a u^2 du = \frac{8\pi}{3} d a^3$$

. . . .

Solución al apartado 3.2.

1. *Si* $\boldsymbol{F}$ *es irrotacional en* Ω *entonces la circulación de* $\boldsymbol{F}$ *sobre cualquier curva cerrada contenida en* Ω *es cero.*

   Falso. Por definición, decir que la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier curva cerrada contenida en Ω es cero equivale a decir que $\boldsymbol{F}$ es conservativo en Ω, con lo cual el enunciado se podría parafrasear: *Si* $\boldsymbol{F}$ *es irrotacional en* Ω *entonces* $\boldsymbol{F}$ *es conservativo en* Ω.

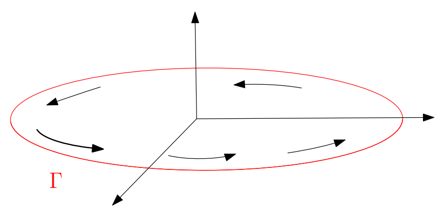
   Ahora bien, el que $\boldsymbol{F}$ sea irrotacional en Ω es condición necesaria para que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo en Ω, pero no es condición suficiente. Un contraejemplo es el siguiente: si se toma el campo

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)$$

   este campo es de clase 1 e irrotacional en el conjunto $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{eje } z\}$. Sin embargo, $\boldsymbol{F}$ no es conservativo en Ω. En efecto, sea la curva Γ cerrada de ecuaciones

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

   y que muestra la figura



La curva Γ está claramente contenida en Ω. La circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre Γ (orientada de forma que si miramos desde arriba se recorra en sentido contrario a las agujas del reloj) vale 2π,con lo que $\boldsymbol{F}$ no puede ser conservativo en Ω.

El enunciado sería verdadero si al conjunto adicional se le hubiese puesto la condición adicional de ser simplemente conexo. En el contraejemplo el conjunto $\Omega := \mathbb{R}^3 - \{\text{eje} z\}$ no es simplemente conexo.

2. *Si Σ es una superficie cerrada contenida en Ω, se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en el interior de Σ (se supone que Σ está orientada según la normal saliente al interior de Σ)*

   Falso. Para que el teorema de Gauss se pueda aplicar a $\boldsymbol{F}$ en el recinto int Σ, el campo $\boldsymbol{F}$ debe ser de clase 1 en un abierto que contenga a Σ y a su interior. Sabemos que $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en Ω y que Σ está contenida en Ω, *pero esto en principio no implica que se cumpla* $\text{int}\Sigma \subset \Omega$. Veamos un contraejemplo: el campo newtoniano $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/\left\|\boldsymbol{r}\right\|^3$ es de clase uno en $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Sea Σ la esfera unidad $x^2+y^2+z^2 = 1$. Claramente Σ está contenida en Ω pero $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ no está contenido en Ω, y por ello no se puede aplicar el teorema de Gauss $\boldsymbol{F}$ en el recinto int Σ.

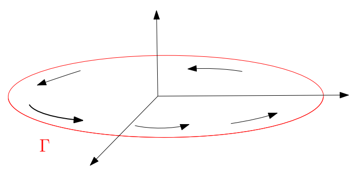
3. *Sea Γ una curva cerrada contenida en Ω. Sea Σ una superficie cuyo borde es Γ y tal que Γ y Σ están orientadas de forma coherente. Entonces se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Stokes a $\boldsymbol{F}$ y Σ.*

   Falso. Para que se pueda aplica el teorema de Stokes a un campo $\boldsymbol{F}$ y a una superficie Σ, el campo $\boldsymbol{F}$ debe ser de clase 1 en un abierto que contenga a la superficie y además la superficie Σ y su curva frontera Γ deben estar orientados de forma coherente. Pues bien, aunque en este caso la segunda condición se cumple, la primer condición no tiene por qué cumplirse. En efecto, aunque Γ está contenida en Ω (conjunto en el que $\boldsymbol{F}$ está definido y es de clase 1), *la superficie Σ no tiene por qué estarlo* y por ello en principio no tienen por qué cumplirse las condiciones para aplicar el teorema. Veamos un contraejemplo: el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y,z)$$

   es de clase 1 en $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash \text{eje } z$. Sea Γ la curva dada por

$$x^2+y^2 = 1$$
$$z = 0$$



y orientada de forma positiva sobre el plano XY. Nótese que Γ está contenida en Ω. Sea Σ la superficie, que se apoya sobre Γ, definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ z &\geq 0, \end{aligned}$$

y consideremos que está orientada de forma coherente con Γ. Pues bien, $\boldsymbol{F}$ no es de clase 1 en ningún abierto que contenga a Σ y por ello no se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Stokes.

El siguiente es otro contraejemplo que hace uso del campo newtoniano $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/\left\|\boldsymbol{r}\right\|^3$. $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Sea Γ la circunferencia

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

que claramente está contenida en Ω. Sea ahora Σ la superficie definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

(es decir, la porción del plano XY contenida dentro de la curva Γ). Como Σ contiene al origen, $\boldsymbol{F}$ no está definida sobre Σ y no existe ningún abierto que contenga a Σ en el que $\boldsymbol{F}$ sea de clase 1, por lo que no se cumplen las condiciones para aplicar Stokes.

4. *Sea ϕ un campo escalar de clase 2 definido en Ω y del que se sabe que es armónico. Sea A un conjunto contenido en Ω cuya frontera es una superficie Σ que suponemos orientada con la normal entrante a A. Entonces se puede asegurar que el flujo de* $\operatorname{grad}\phi$ *sobre Σ es nulo.*

   Verdadero. Puesto que ϕ es de clase 2 en Ω, $\operatorname{grad}\phi$ es de clase 1 en dicho conjunto. Como A está contenido en Ω, existe un abierto (concretamente Ω) que contiene a A en el que $\operatorname{grad}\phi$ es de clase 1 y por ello se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en el conjunto A. Puesto que Σ está orientada con la normal entrante a A,si aplicamos el teorema de Gauss tenemos

$$\iiint_A \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)\, dxdydz = -\int_\Sigma \operatorname{grad}\phi \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

   Ahora,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \Delta\phi \underset{\substack{\uparrow \\ \phi \text{ es armónica en } \Omega}}{=} 0 \text{ en } A$$

   y por tanto,

$$\int_\Sigma \operatorname{grad}\phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

   como queríamos demostrar.

5. *Si* $\boldsymbol{F}$ *admite un potencial vector en* Ω *entonces* Ω *es estrellado y* $\boldsymbol{F}$ *es solenoidal en* Ω.

   Falso. Hay un resultado que dice que si un campo $\boldsymbol{F}$ admite un potencial vector en un abierto Ω entonces es solenoidal en Ω. Lo que no parece tan claro es que Ω tenga que ser estrellado. Hay otro resultado que dice que si Ω es un abierto estrellado y $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en Ω entonces $\boldsymbol{F}$ admite un potencial vector en Ω. El enunciado cuya veracidad o falsedad estamos estudiando es el recíproco del resultado anterior.

   Para ver que es falso basta con encontrar un contraejemplo. Sea

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(1,1,1)$$

   que es de clase 2 en el conjunto $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Sea $\boldsymbol{F} := \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$, cuya expresión explícita no hace falta ni siquiera calcular. Como $\boldsymbol{F}$ se obtiene tomando derivadas parciales en las componentes de $\boldsymbol{G}$, claramente es de clase 1 en Ω. Por su propia definición, $\boldsymbol{F}$ admite potencial vector en Ω ($\boldsymbol{G}$ es potencial vector de $\boldsymbol{F}$) pero sin embargo Ω no es estrellado.

Convocatoria extraordinaria

Problema 1

Este problema consta de dos apartados independientes:

1.1.

1. Se considera el recinto B de $\mathbb{R}^2$ definido por la condición $2x^2 + y^2 - 2y \leq 1$. Se pide calcular la integral
$$I = \iint_B \left(1 - 2x^2 - y^2 + 2y\right) dxdy$$

2. Sean Σ_1 y Σ_2 las superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas por
$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x^2 + 2y^2 & = & z^2 \\ z & \geq & 0 \end{array} \right. \qquad \Sigma_2 : \; z - y - 1 = 0$$
y sea A el recinto acotado de $\mathbb{R}^3$ limitado por ambas. Sobre A hay definida una densidad volumétrica de masa (kg/m^3), siendo la densidad en cada punto del sólido proporcional a la distancia de dicho punto al plano XY, es decir, $\rho(x, y, z) = K\,|z|$. Se pide calcular la masa del sólido A.

1.2. Sea el campo $\boldsymbol{F}$ definido por
$$\boldsymbol{F}\,(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{r^\alpha}$$
donde α es un número real positivo y donde $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Determinar razonadamente los valores de α para los que $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en su dominio de definición.

2. Sea $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ y sea Σ la frontera de Q orientada con la normal saliente. Sea el campo $\boldsymbol{H}$ definido por
$$\boldsymbol{H}(x, y, z) := \frac{(-y, x, 0)}{r^2} + (x, y, z)$$
Se pide calcular razonadamente el flujo de $\boldsymbol{H}$ sobre Σ.

Solución al apartado 1.1.

1.1.a. Nos están pidiendo calcular una integral doble sobre un cierto recinto de integración B. Estudiemos cómo es este recinto. La frontera de B está definida por
$$2x^2 + y^2 - 2y = 1$$

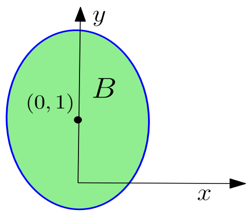
Completando cuadrados en la expresión anterior tenemos

$$2x^2 + (y-1)^2 = 2$$

es decir

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

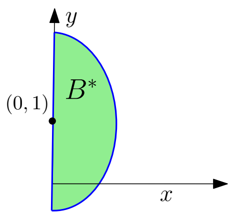
que es una elipse centrada en el punto $(0,1)$ con ejes coincidentes con los cartesianos y con semiejes 1 y $\sqrt{2}$.



La función subintegral es continua, y como B es un compacto dicha función está acotada, con lo que la integral existe en sentido propio. Puesto que la función subintegral es par en x y B es simétrico respecto de $x = 0$ tenemos

$$I = 2 \iint_{B^*} \left(1 - 2x^2 - y^2 + 2y\right) dxdy$$

donde B^* es el recinto de la figura.



Para calcular la integral parece razonable hacer un cambio adecuado a elípticas trasladadas (es decir, una traslación seguida de un cambio a elípticas), pues entonces podremos transformar B^* en un rectángulo. En efecto haciendo el cambio $(x,y) = \phi(u,v)$ definido por

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= 1 + \sqrt{2} u \operatorname{sen} v \end{aligned}$$

tenemos que $\phi^{-1}(B^*)$ es el siguiente rectángulo

$$\phi^{-1}(B^*) = \underbrace{[0,1]}_{u} \times \underbrace{[0,\pi]}_{v}.$$

Además, la función subintegral se puede escribir

$$1 - 2x^2 - y^2 + 2y = 2 - \left[2x^2 + (y-1)^2\right]$$

con lo que en las nuevas variables toma la forma

$$2-\left[2u^2\cos^2 v+2u^2\operatorname{sen}^2 v\right]=2-2u^2$$

que es una expresión muy sencilla. Por tanto el cambio propuesto parece ideal, pues simplifica mucho tanto el recinto de integración como la función subintegral.

Usando que el jacobiano de la transformación es $\sqrt{2}u$ tenemos

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{B^*}\left(1-2x^2-y^2+2y\right)dxdy=2\iint_{[0,1]\times[0,\pi]}\left(2-2u^2\right)\sqrt{2}ududv=\\&=2\pi 2\sqrt{2}\int_0^1\left(1-u^2\right)udu=2\pi 2\sqrt{2}\frac{\left(1-u^2\right)^2}{2*2}\Big|_{u=1}^{u=0}=\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

1.1.b. La masa viene dada por

$$M=\iiint_A\rho\left(x,y,z\right)dxdydz=K\iiint_A|z|\,dxdydz=K\iiint_A zdxdydz$$

Estudiemos quién es el conjunto A. Claramente, Σ_2 es un plano perpendicular al plano YZ. Puesto que no es inmediato reconocer la superficie Σ_1, estudiaremos su intersección con planos adecuados. Parece razonable estudiar la intersección de Σ_1 con planos $z=C$, $C\geq 0$. Así tenemos las curvas Γ_C definidas por

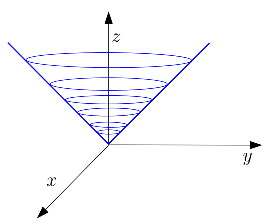
$$\begin{aligned}2x^2+2y^2&=z^2\\z&=C\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}2x^2+2y^2&=C^2\\z&=C\end{aligned}$$

que son circunferencias, situadas sobre el plano $z=C$, de centro $(0,0,C)$ y radio C.

Para $z=0$ la superficie se reduce al punto $(0,0,0)$ y cuando z aumenta también lo hace el radio de las circunferencias. Como además este radio aumenta de forma lineal con la altura se trata de una superficie cónica que tiene el aspecto que muestra la siguiente figura



La curva Γ intersección de Σ_1 y Σ_2 está definida por

$$\Gamma:\left\{\begin{array}{rcl}2x^2+2y^2&=&z^2\\z-y-1&=&0\end{array}\right.$$

Estudiemos la curva Γ' proyección de Γ sobre el plano XY. Para ello hay que elimiar la z de las dos ecuaciones anteriores. Despejando Z de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera obtenemos

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 &= (y+1)^2 \\ z - y - 1 &= 0 \end{cases}$$

es decir,

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2y &= 1 \\ z - y - 1 &= 0 \end{cases}$$

por lo que la curva Γ' está definida por

$$\Gamma' : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

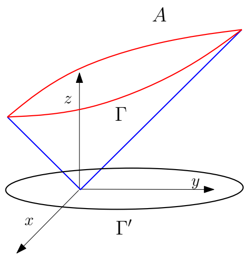
como curva en $\mathbb{R}^3$ o bien

$$2x^2 + y^2 - 2y = 1 \tag{3}$$

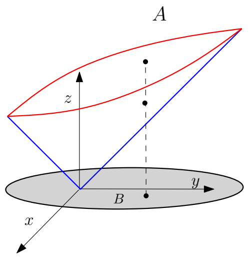
como curva en $\mathbb{R}^2$.

Comentario: La ecuación (3) no corresponde a la curva Γ sino a la **proyección** de la curva Γ sobre el plano XY considerada como curva en $\mathbb{R}^2$.

Por lo tanto A tiene el siguiente aspecto



Nos damos cuenta de que la proyección de A sobre el plano XY es precisamente el conjunto B del apartado anterior, es decir, el interior de Γ' es B. Por lo tanto, para llevar a cabo la integración sobre A parece razonable fijar primero (x, y) e integrar en z



Por lo tanto

$$M = K \iiint_A z dxdydz = K \iint_B \left(\int_{z_{cono}}^{z_{plano}} z dz \right) dxdy = K \iint_B \left(\int_{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{y+1} z dz \right) dxdy =$$

$$= \frac{K}{2} \iint_B \left((y+1)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) \right) dxdy = \frac{K}{2} \iint_B \left(1 - 2x^2 - y^2 + 2y\right) dxdy.$$

Ahora nos damos cuenta de que la integral del segundo miembro no es más que la integral I que se calculó en el primer apartado. Por ello tenemos

$$M = \frac{K}{2}\iint_B \left(1 - 2x^2 - y^2 + 2y\right) dxdy = \frac{K}{2} I = \frac{\sqrt{2}K\pi}{2}$$

Solución al apartado 1.2.
1.2.a. Puesto que $\alpha > 0$, el denominador en la expresión de $\boldsymbol{F}$ se anula si y sólo si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Por ello el campo $\boldsymbol{F}$ está definido en el conjunto $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Además $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 (de hecho es de clase infinito) en dicho conjunto.

Calculemos la divergencia de $\boldsymbol{F}$. Utilizando la fórmula ara la divergencia del producto de un campo escalar por un campo vectorial tenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \frac{(-y, x, 0)}{r^\alpha} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \cdot (-y, x, 0) + \frac{1}{r^\alpha} \operatorname{div}(-y, x, 0)$$

Ahora, usando que el gradiente de un campo escalar no es más que su matriz jacobiana y utilizando la regla de la cadena para la composición de dos aplicaciones tenemos

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \operatorname{grad}\left(r^{-\alpha}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla de la cadena}}}{=} -\alpha r^{-\alpha-1} \operatorname{grad} r = -\alpha r^{-\alpha-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\alpha \frac{\boldsymbol{r}}{r^{\alpha+2}}$$

donde hemos usado que

$$\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

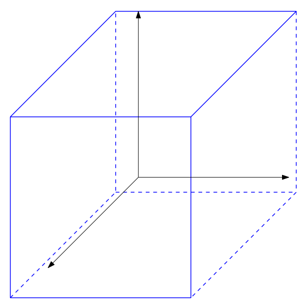
Además

$$\operatorname{div}(-y, x, 0) = 0$$

con lo que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -\alpha \frac{\boldsymbol{r}}{r^{\alpha+2}} \cdot (-y, x, 0) = -\alpha \frac{(x, y, z)}{r^{\alpha+2}} \cdot (-y, x, 0) = 0,$$

pues $(x, y, z) \cdot (-y, x, 0) = 0$ en todos los puntos (x, y, z). En definitiva, hemos hallado que **para todo $\alpha > 0$ el campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en Ω.**
1.2.b. El conjunto Q es un cubo



La frontera Σ de Q está formada por 6 superficies $\Pi_1, ..., \Pi_6$ que corresponden a superficies planas paralelas a los planos coordenados.

Tenemos que

$$\int_\Sigma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\int_\Sigma \frac{(-y,x,0)}{r^2}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}_{\substack{\parallel \\ I}} + \underbrace{\int_\Sigma (x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma}}_{\substack{\parallel \\ J}}$$

Cálculo de J. Por supuesto, una posibilidad para calcular J es utilizar la definición de flujo. Para ello expresaríamos

$$J = \int_\Sigma (x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Pi_1} (x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \cdots + \int_{\Pi_6} (x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

y ahora calcularíamos el flujo sobre cada uno de los Π_i parametrizando la superficie y aplicando la definición. Puesto que son 6 las integrales a calcular, estudiemos si existe alguna alternativa menos laboriosa.

Puesto que el campo (x,y,z) es de clase 1 en todo $\mathbb{R}^3$ se cumplen para aplicar el teorema de Gauss al interior del cubo, es decir, el campo es de clase 1 en un abierto que contiene a Q. Por ello tenemos,

$$\begin{aligned} J &= \int_\Sigma (x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_Q \operatorname{div}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_Q 3dxdydz = \\ &= 3\mathrm{Vol}\,(Q) = 3\times 8 = 24. \end{aligned}$$

pues al ser Q un cubo con lado de longitud 2, su volumen es $2^3 = 8$.

Cálculo de I. Como sucede en el caso de I, en principio podríamos descomponer la integral en 6 integrales y calcular cada una de ellas aplicando la definición. Veamos si hay alguna alternativa. El campo

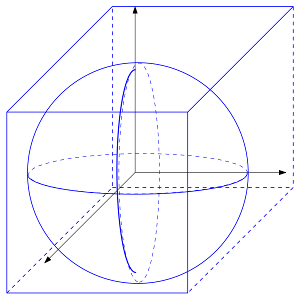
$$\boldsymbol{T} = \frac{(-y,x,0)}{r^2}$$

es un caso particular del campo $\boldsymbol{F}$ del apartado anterior con $\alpha = 2$. Por ello sabemos que $\boldsymbol{T}$ es de clase 1 y solenoidal en $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Como el origen está contenido en Q no se puede aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{T}$ en Q, es decir, no existe ningún abierto que contenga a Q en el que el campo $\boldsymbol{T}$ sea de clase 1.

Sin embargo, podemos hacer uso del siguiente resultado: como $\boldsymbol{T}$ es solenoidal en Ω, el flujo de $\boldsymbol{T}$ sobre Σ coincide con el flujo de $\boldsymbol{T}$ sobre cualquier superficie cerrada que se obtenga deformando Σ de manera continua sin salirnos de Ω (y orientada con la normal saliente). Puesto que el denominador que aparece en la expresión de $\boldsymbol{T}$ tiene una expresión sencilla cuando $r = cte$, conviene tomar como superficie deformada una esfera centrada en el origen. Sea por ejemplo E la esfera unidad centrada en el origen y orientada con la

normal saliente.



Entonces tenemos que

$$I = \int_{\Sigma} \frac{(-y,x,0)}{r^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{E} \frac{(-y,x,0)}{r^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{4}$$

Nota: para asegurar que se cumple (4) no es imprescindible conocer el resultado que hemos enunciado anteriormente sobre la "igualdad del flujo al deformar Σ a E", pues (4) se puede deducir directamente del teorema de Gauss. En efecto, denotemos D al conjunto comprendido entre las superficies Σ y E. Como D está contenido en Ω se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Gauss al campo $\boldsymbol{T}$ en D, es decir, existe un abierto (concretamente Ω) que contiene a D y en el que $\boldsymbol{T}$ es de clase 1. Entonces dicho teorema garantiza que

$$\iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{T} dxdydz = \int_{\partial D} \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_{E} \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

y al ser $\operatorname{div} \boldsymbol{T} = 0$ en D se obtiene (4).

Volviendo al cálculo de I tenemos

$$I = \int_{\Sigma} \frac{(-y,x,0)}{r^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{E} \frac{(-y,x,0)}{r^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \underset{\substack{\uparrow \\ r=1 \text{ sobre } E}}{=} \int_{E} (-y,x,0) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Para calcular esta integral utilizaremos que el vector normal unitario saliente a la esfera unidad E es $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$. Por tanto

$$I = \int_{E} (-y,x,0) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{E} (-y,x,0) \cdot (x,y,z)\, d\sigma = 0$$

pues $(x,y,z) \cdot (-y,x,0) = 0$ en todos los puntos de la esfera. Por ello el flujo de T sobre Σ es nulo. Otra forma de ver que dicho mujo es nulo es aplicando el teoremna de Gauss al campo $(-y,x,0)$ (que es de clase 1 en todo $\mathbb{R}^3$) en el conjunto $\operatorname{int}(E)$, pues entonces

$$I = \int_{E} (-y,x,0) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Th. Gauss}}}{=} \iiint_{int(E)} \operatorname{div}(-y,x,0)\ dxdydz = 0$$

En definitiva

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = I + J = 0 + 24 = 24.$$

Comentarios:

- 1. Nótese que si S es cualquier superficie cerrada de clase 1 contenida en Ω (es decir, que no pase por el origen) y que no contenga a dicho origen en su interior, el teorema de Gauss aplicado al interior de dicha superficie garantizará que

$$\int_S \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Uniendo esto al hecho de que el flujo de $\boldsymbol{T}$ sobre Σ (y sobre cualquier superficie cerrada que rodee al origen) es también cero, hemos llegado a la siguiente conclusión*: si S es cualquier superficie cerrada de clase 1 contenida en Ω (es decir, que no pase por el origen) entonces*

$$\int_S \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

- 2. Como el origen está contenido en Q, *no se puede aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{H}$ en Q,* es decir, no existe ningún abierto que contenga a Q en el que el campo $\boldsymbol{H}$ sea de clase 1.

- 3. Como $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \operatorname{div}(x, y, z) = 0+3+3$ en Ω, *tampoco es cierto que el flujo de $\boldsymbol{H}$ sobre Σ coincida con el flujo de $\boldsymbol{H}$ sobre cualquier superficie cerrada que se obtenga deformando Σ de manera continua sin pasar por el origen* (y orientada con la normal saliente). Sí sería cierto si $\boldsymbol{H}$ fuese solenoidal en Ω, pero no lo es.

Problema 2

Este problema consta de dos apartados independientes. En los apartados 1a) y 2a) decídase si las afirmaciones que se hacen son verdaderas o falsas marcando con un aspa la opción que proceda y justifíquese por escrito la respuesta.

1) Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) := (F_1(x, y)\, ,\, F_2(x, y)) = \dfrac{(-y\, ,\, x-1)}{(x-1)^2 + y^2}$.

1a) Se cumplen las hipótesis para poder afirmar que:

$$\int_\Gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy,$$

donde Γ es la curva de ecuación cartesiana $4x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo y $D \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto acotado limitado por ella.

V ☐ F ☐ (**Justifíquese la respuesta**).

1b) Calcúlese razonadamente el valor de la circulación de $\boldsymbol{F}(x, y)$ a lo largo de la curva poligonal que une los puntos $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 3)$ y $(-1, 0)$, orientada de forma que el punto inicial es $(3, 0)$ y el final es $(-1, 0)$.

2) En $\mathbb{R}^3$ se considera el campo vectorial definido por: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+9z^2)^{3/2}}$.

2a) Se cumplen las hipótesis para poder afirmar que

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el conjunto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ se considera orientada según la normal saliente y está formada por las superficies $x^2+y^2 = z+1$ y $z = 4$.

V ☐ F ☐ (**Justifíquese la respuesta**).

2b) Calcúlese razonadamente el valor del flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientada según la normal saliente.

Respuesta.

1a) Para que la igualdad que se propone sea cierta deben cumplirse la hipótesis del Teorema de Green. Se tiene:

- El dominio D es unión de dominios proyectables y, por tanto, simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$.
- La curva Γ es la frontera de D y se recorre en sentido positivo.
- El campo $\boldsymbol{F}$ es de clase C^∞ en D ya que el punto $(1,0)$ (único en el que $\boldsymbol{F}$ no está definido) no pertenece a D.

Por tanto, se cumplen las mencionadas hipótesis y, por tanto, la afirmación es verdadera.

1b) Se podría calcular la circulación pedida parametrizando cada uno de los tres segmentos que forman la poligonal (que se representará por P) y aplicando la definición de circulación. Sin embargo, es conveniente comprobar primero si el campo dado es conservativo o no. Para ello tenemos que, en este caso:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}.$$

Por tanto, el campo es conservativo en cualquier dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Esta propiedad permite calcular la circulación a lo largo de la poligonal P que se pide utilizando el arco Γ de la circunferencia $(x-1)^2+y^2 = 4$ con origen el punto $(3,0)$ y final en el punto $(-1,0)$. Sobre este arco Γ el campo tiene la expresión:

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{1}{4}(-y, x-1).$$

Una parametrización de Γ es $\boldsymbol{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, donde:

$$x(\theta) = 1 + 2\cos\theta, \quad y(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta \in [0,\pi].$$

Por tanto, la circulación pedida se puede calcular de la siguiente forma:

$$\int_P \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds} = \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds} = \frac{1}{4}\int_0^\pi (-y(\theta), x(\theta)-1)\cdot (x'(\theta), y'(\theta))\, d\theta \;=\; \int_0^\pi \, d\theta \;=\; \pi\,.$$

2a) El campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ está definido y es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Como el dominio Ω dado contiene el origen, la divergencia de $\boldsymbol{F}$ no está definida en Ω y, por tanto, el primer miembro de la igualdad que se propone no está definido. Es por ello que la afirmación que se hace en el enunciado es falsa.

2b) El campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ está definido y tiene divergencia nula en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, lo que es cierto, en particular, en el conjunto limitado por la semiesfera E dada y la superficie elipsoidal Σ de ecuación cartesiana $x^2+y^2+9z^2 = 1$ situada en el semiespacio $z \geq 0$. Nótese que ambas superficies tienen el mismo borde (que es la curva $x^2+y^2=1$, $z=0$) y, por tanto, limitan un dominio acotado situado en $z\geq 0$ que no contiene el origen. Esta propiedad nos permite utilizar el teorema de Gauss de cuya aplicación al campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ en el dominio mencionado concluimos que el valor del flujo de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ a través de la cara exterior de la esfera E coincide con el del flujo de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ a través de la cara exterior del elipsoide Σ.

Sobre esta superficie Σ el campo tiene la expresión:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)\,.$$

Una parametrización de Σ es $\boldsymbol{S}(\theta,\phi) = (x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi))$, dónde:

$$x(\theta,\phi) = \cos\theta \operatorname{sen}\phi\,, \quad y(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,, \quad z(\theta,\phi) = \frac{1}{3}\cos\phi\,, \quad \theta\in[0,2\pi]\,,\, \phi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

La normal a la cara exterior de esta superficie es:

$$\boldsymbol{n}(\theta,\phi) := \frac{\partial \boldsymbol{S}(\theta,\phi)}{\partial\phi}\times\frac{\boldsymbol{S}(\theta,\phi)}{\partial\theta} = \left(\frac{1}{3}\cos\theta\, \operatorname{sen}^2\phi\,,\, \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\, \operatorname{sen}^2\phi\,,\, \cos\phi\, \operatorname{sen}\phi\right)\,.$$

Denotando por E^+ la cara exterior de la esfera y por Σ^+ la cara exterior de la superficie elipsoidal, ambas situadas en $z\geq 0$, el flujo que se pide calcular viene dado por:

$$\iint_{E^+} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{d\sigma} = \int_0^{\pi/2} d\phi \left\{\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi))\cdot \boldsymbol{n}(\theta,\phi)\, d\theta\right\} =$$

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{2\pi}{3}.$$

Problema 3

Sea E la superficie elipsoidal de ecuación implícita

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$$

orientada según el vector normal saliente unitario $\boldsymbol{n}$. Se consideran las superficies

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in E \,/\, y \geq 1\}, \quad S = \{(x,y,z) \in E \,/\, y \leq 1\}$$

ambas orientadas por $\boldsymbol{n}$ y sea Γ su borde. Sea D la superficie plana de borde Γ, orientada por el vector canónico $\boldsymbol{j}$.

1. Determinar parametrizaciones de Σ y Γ que sean coherentes.

   Nota: Un dibujo puede ayudar a ilustrar el razonamiento, pero no sirve como prueba.

2. Se considera la curva Γ con la parametrización del apartado anterior. Calcular la circulación del campo vectorial

   $$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{4x^2 + 2y^2 + z^2}(2x - y^2 + z, x^2 - y^2, -x + yz)$$

   a lo largo de Γ.

3. Dado el campo vectorial

   $$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{1}{(4x^2 + 2y^2 + z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

   estudiar si existen relaciones entre los flujos de $\boldsymbol{G}$ a través de cada una de las superficies E, D, S y Σ. Calcular uno cualquiera de ellos.

Respuesta: Vamos a responder al primer apartado con varias parametrizaciones posibles.

1(a). Si deformamos el elipsoide E a una esfera y tomamos coordenadas esféricas con el ángulo polar sobre el eje OY tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y &= \sqrt{2}\cos\varphi \\ z &= 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \end{aligned}$$

En la superficie Σ se tiene $y \geq 1$ por tanto tenemos que tomar $\cos\varphi \geq 1/\sqrt{2}$, lo que equivale a hacer variar φ en $[0, \pi/4]$. Una posible parametrización de Σ es

$$\boldsymbol{\sigma}(\varphi,\theta) = (\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\varphi, 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta), \quad (\varphi,\theta) \in [0,\pi/4] \times [0, 2\pi].$$

Calculemos el vector normal asociado a esta parametrización para ver si tiene el sentido de $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{N}(\varphi,\theta) := \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\varphi,\theta)}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\varphi,\theta)}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi & 2\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 & -2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$$
$$= (2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta).$$

Este vector tiene segunda componente positiva para $\varphi \neq 0$, esto es suficiente para afirmar que la orientación de Σ es la adecuada.

La curva Γ está situada en el plano $y = 1$ que corresponde a $\varphi = \pi/4$. Una parametrización coherente de Γ es entonces

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{\sigma}(\pi/4,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta,\ 1,\ \sqrt{2}\cos\theta\right), \quad \theta \in [0,2\pi].$$

y el vector tangente correspondiente es:

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ 0,\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\right).$$

1(b). La proyección de Σ sobre el plano ZX es $B = \{(z,x) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2 + z^2 \leq 2\}$; si se despeja y de la ecuación implícita de Σ se obtiene la parametrización:

$$\boldsymbol{h}(z,x) = (x, \sqrt{2 - 2x^2 - z^2/2},\ z), \quad (z,x) \in B.$$

El vector normal asociado a esta parametrización es

$$\frac{\partial\boldsymbol{h}(z,x)}{\partial z} \times \frac{\partial\boldsymbol{h}(z,x)}{\partial x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -\dfrac{z}{2\sqrt{2-2x^2-z^2/2}} & 1 \\ 1 & -\dfrac{4x}{2\sqrt{2-2x^2-z^2/2}} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2-2x^2-z^2/2}}(4x,\ 1,\ z).$$

Observamos que este vector está bien definido sobre la superficie (el denominador no se anula ya que $4x^2 + z^2 \leq 2$) y además orienta correctamente la superficie por tener segunda componente positiva.

El borde de Σ es la elipse $4x^2 + z^2 = 2$ situada en el plano $y = 1$; así pues Γ es la imagen por $\boldsymbol{h}$ de la frontera de B *recorrida en sentido antihorario* en el plano ZX, es

decir $z = \sqrt{2}\cos\theta,\ 2x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$. Obtenemos la misma parametrización de Γ que por el procedimiento anterior:

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta,\ 1,\ \sqrt{2}\cos\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

1(c). Otra posibilidad consiste en tomar la variable y como parámetro y parametrizar la elipse $x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1 - \dfrac{y^2}{2}$ en cada plano $y = $ cte., es decir:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}}\operatorname{sen} t \\ y &= \lambda \\ z &= 2\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}}\cos t \end{aligned}$$

Para determinar el rango de variación de λ, observemos que por un lado $y \geq 1$ y por otro $1 - y^2/2 \geq 0$, por tanto $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [1, \sqrt{2}]$.

Calculemos el vector normal asociado a esta parametrización para ver si tiene el sentido de $\boldsymbol{n}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}(t,\lambda) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \sqrt{1-\lambda^2/2}\cos t & 0 & -2\sqrt{1-\lambda^2/2}\operatorname{sen} t \\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{1-\lambda^2/2}}\operatorname{sen} t & 1 & \dfrac{-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2/2}}\cos t \end{vmatrix} \\ &= (2\sqrt{1-\lambda^2/2}\ \operatorname{sen} t,\ \lambda,\ \sqrt{1-\lambda^2/2}\ \cos t). \end{aligned}$$

Este vector tiene segunda componente positiva, por lo que orienta Σ de la forma pedida. La curva borde se obtiene haciendo $\lambda = 1$; como el segmento $[(0,1),(2\pi,1)]$ como parte de la frontera de $[0,2\pi] \times [1,\sqrt{2}]$ está recorrido en sentido antihorario, obtenemos la misma parametrización de la curva que en los casos anteriores.

Observación:

Para parametrizar una superficie acotada en $\mathbb{R}^3$ hay que dar una función $\Phi : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ siendo B un conjunto cerrado y acotado (un rectángulo compacto, un disco, el interior de una elipse con su frontera, etc.). Si no se describe la función Φ y se expresan simplemente los (x, y, z) de Σ en función de dos parámetros no se está dando una orientación expresa de la superficie. Para ello es preciso o bien decir cuál

es el orden de los parámetros o determinar el vector normal. Esto es fundamental, ya que si los parámetros son u y v las dos orientaciones posibles de la superficie son

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \times \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}, \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \times \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u}$$

que, como sabemos, son opuesta una de la otra. Notemos que el dominio de los parámetros cambia, si $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \dots\}$ es el correspondiente al primer vector, entonces el relativo al segundo es $\tilde{B} = \{(v,u) \in \mathbb{R}^2,\ (u,v) \in B\}$. Esto es importante ya que el sentido antihorario en B es el horario en $\tilde{B}$ y viceversa.

2(a). Para calcular la circulación pedida evaluamos el campo $\boldsymbol{F}$ sobre la curva y multiplicamos escalarmente por el vector tangente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\theta)) \cdot \boldsymbol{r}'(\theta) &= \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - 1 + \sqrt{2}\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + (-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\cos\theta)(-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + 1\right).\end{aligned}$$

Por último,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\theta)) \cdot \boldsymbol{r}'(\theta)\ d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

ya que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\ d\theta = 0.$$

2(b). Alternativamente puede calcularse la integral de línea utilizando el teorema de Stokes. La superficie plana D orientada por $\boldsymbol{j}$ tiene por borde Γ y además con sentido de recorrido coherente. Definamos el campo $\boldsymbol{H}$ como:

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) = \frac{1}{4}(2x - 1 + z, x^2 - 1, -x + z)$$

entonces los campos $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{H}$ coinciden sobre la curva Γ por tanto:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} = \int_\Gamma \boldsymbol{H} = \int_D \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{1}{2}A(D) = \frac{\pi}{2}$$

donde se ha tenido en cuenta que la segunda componente del rotacional de $\boldsymbol{H}$ es $1/2$ y la curva Γ es una elipse de semiejes $\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{2}$ y por tanto el área de D es π.

---

3. Dado que la superficie E es cerrada y contiene el origen, punto en el cual $\boldsymbol{G}$ no está definido, es natural estudiar si el campo es solenoidal; calculamos su divergencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{G}(x,y,z) &= \operatorname{grad}(4x^2+2y^2+z^2)^{-3/2}\cdot(x,y,z)+(4x^2+2y^2+z^2)^{-3/2}\operatorname{div}(x,y,z)\\ &= -3(4x^2+2y^2+z^2)^{-5/2}(4x,2y,z)\cdot(x,y,z)+3(4x^2+2y^2+z^2)^{-3/2}=0.\end{aligned}$$

El campo $\boldsymbol{G}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, por tanto como consecuencia del teorema de Gauss su flujo será nulo a través de cualquier superficie cerrada que *no contenga el origen*; mientras que tomará el mismo valor a través de superficies cualesquiera cerradas que contengan el origen y estén orientadas según el vector normal saliente.

Sean E,Σ,S y D las superficies orientadas como se indica en el enunciado y sea D^- la superficie D pero orientada por $-\boldsymbol{j}$. las superficies $E=\Sigma\cup S$ y $S\cup D$ son cerradas y contienen el origen, ambas están orientadas según el vector normal saliente,

$$\int_E \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}=\int_\Sigma \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}+\int_S \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}=\int_S \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}+\int_D \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{j}.$$

La superficie $\Sigma\cup D^-$ es cerrada y no contiene el origen, por tanto:

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma\cup D^-}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_\Sigma \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}+\int_{D^-}\boldsymbol{G}\cdot(-\boldsymbol{j})=0\\ &\Rightarrow \int_\Sigma \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}=\int_D \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

Calculemos, por ejemplo, el flujo a través de E y a través de Σ. El denominador del campo $\boldsymbol{G}$ sobre el elipsoide es constante,

$$(4x^2+2y^2+z^2)^{-3/2}=4^{-3/2}\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}\right)^{-3/2}=\frac{1}{8}.$$

Para calcular el flujo sobre E aplicamos el teorema de Gauss al campo identidad $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}$, cuya divergencia es 3; sea Ω el elipsoide sólido cuya frontera es E, entonces:

$$\int_E \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{8}\int_E \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{3}{8}\iiint_\Omega dxdydz=\frac{3}{8}V(\Omega)=\frac{3}{8}\frac{4}{3}\pi 2\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi.$$

Para calcular el flujo sobre Σ usamos la parametrización 1(a). Evaluemos el campo en $\boldsymbol{\sigma}$ y multipliquemos escalarmente por $\boldsymbol{N}(\varphi,\theta)$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}(\sigma(\varphi,\theta))\cdot\boldsymbol{N}(\varphi,\theta)=\frac{1}{8}\sigma(\varphi,\theta)\cdot\boldsymbol{N}(\varphi,\theta)\\ &=\frac{1}{8}(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\sqrt{2}\cos\varphi,2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta)\cdot(2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}\varphi.\end{aligned}$$

Sustituimos y se tiene:

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{4}\iint_{[0,\pi/4]\times[0,2\pi]} \operatorname{sen}\varphi \; d\varphi d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \; d\varphi = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

También se calcula fácilmente el flujo a través de D, mediante un cambio de variable a coordenadas elípticas:

$$\int_D \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{j} = \iint_{2x^2+z^2/2\leq 1} \frac{dxdz}{(4x^2+z^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\rho}{(\rho^2+1)^{3/2}}d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[-(\rho^2+1)^{-1/2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Obviamente obtenemos el mismo valor que a través de Σ.

Con estos valores ya podemos determinar el flujo a través de S que resulta ser:

$$\int_S \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} = \int_E \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} - \int_D \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{j} = \sqrt{2}\pi - \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

Observaciones:

Una frase del tipo:

Como $\boldsymbol{G}$ *tiene un punto singular en el origen el flujo a través de dos superficies igualmente orientadas coincide.*

no tiene sentido; incluso si se interpreta que con la expresión *dos superficies igualmente orientadas* lo que se quiere decir es que dos superficies con borde común se orientan coherentemente con un determinado sentido de recorrido de su borde, la afirmación sigue siendo falsa, valga como contraejemplo el flujo de $\boldsymbol{G}$ a través de S y a través de Σ, según esa afirmación deberían ser uno opuesto del otro, lo que no es cierto.

Es un error habitual afirmar que como $\boldsymbol{G}$ no está definido en el origen el flujo a través de cualquier superficie cerrada que lo contenga es independiente de la superficie. Esto es **falso** en caso de que el campo no sea solenoidal.

Por último recordemos que el volumen de un elipsoide sólido es $\frac{4}{3}\pi abc$ siendo a, b, c las longitudes de los semiejes.

Curso 2012/13

Convocatoria ordinaria

EC. Primera prueba común

Pregunta 1. Sobre la superficie esférica de centro el origen y radio 2 sea Γ la curva parametrizada $\varphi(t) = (1 + \cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t,\ 2 \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$ sobre la que se define una densidad de masa que en cada punto es igual a su distancia al plano XZ.

1. Calcular la masa de Γ con la densidad dada. $M_\Gamma =$

2. Determinar unas ecuaciones cartesianas implícitas de Γ

Pregunta 2. Calcular la circulación I del campo

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(ye^{xy} \cos x - e^{xy} \operatorname{sen} x,\ x^2 + xe^{xy} \cos x\right)$$

a lo largo de la curva $(x - m - 1)^2 + 4y^2 = 1$ orientada positivamente (siendo m el máximo entre las unidades y decenas de su número de matrícula).

$I =$

Pregunta 3. En $\mathbb{R}^2$ se considera el campo vectorial definido por: $\boldsymbol{F}(x, y) = e^{x^2+y^2}\,(ax\,,\,2my)$, donde m es el máximo entre las unidades y decenas de su número de matrícula.

1. Determinar el valor de a para el que el campo es conservativo. $a =$

2. Determinar un potencial escalar U del campo $\boldsymbol{F}$ válido en todo su dominio de definición y tal que $U(0, 0) = 2m$. $U(x, y) =$

3. Determinar la circulación I del campo $\boldsymbol{F}$ sobre la porción de la circunferencia de centro el punto $(1, 0)$ y radio 1 situada en el primer cuadrante, limitada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y recorrida en sentido horario.

$I =$

Pregunta 4.

1. Considérese la figura (a). Sea $\boldsymbol{F}$ un campo del que se sabe que es de clase 1 y conservativo en Ω. Entonces la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva Γ es nula.

   V ☐ F ☐

2. Considérese la figura (b). Sea $\boldsymbol{F}$ un campo de clase 1 en Ω. Entonces el valor de la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre las curvas Γ_1 y Γ_2 es el mismo. V ☐ F ☐

3. Considérese la figura (c). Sea $\boldsymbol{F}(x, y) = (2y, x)$. Entonces existe alguna curva contenida en Ω tal que la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre la misma no vale cero.

   V ☐ F ☐

4. Considérese la figura (d). Sea W un campo escalar de clase 1 en Ω. Entonces la circulación de $\operatorname{grad} W$ por la curva Γ es nula. V ☐ F ☐

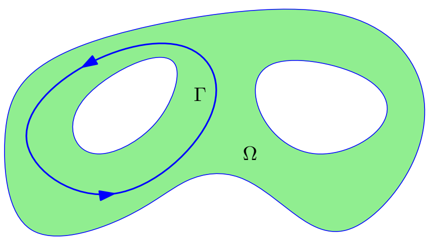


Figura (a)

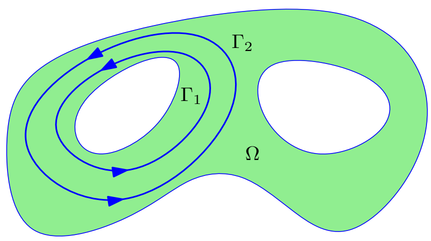


Figura (b)

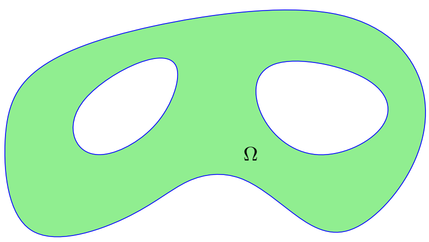


Figura (c)

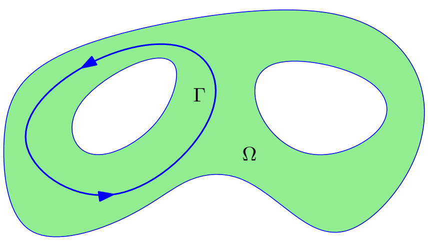


Figura (d)

Pregunta 5. Sea $\boldsymbol{F} = (P, Q) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\,,\,(3,0)\})$ tal que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ y, además:

$$\int_{x^2+y^2=3y} Pdx + Qdy \;=\; \pi\,, \quad \int_{x^2+y^2=16} Pdx + Qdy \;=\; 0$$

(supónganse las curvas recorridas una sola vez en sentido antihorario).

1. El campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo en el semiplano $x > 3$ V ☐ F ☐
2. El campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo en el semiplano $y < 1$ V ☐ F ☐
3. $\displaystyle\int_{(x-2)^2/4+y^2/9=1} Pdx + Qdy \;=$
4. $\displaystyle\int_{4(x-1)^2/9+y^2=1} Pdx + Qdy \;=$

Respuesta:

- **Pregunta 1.** 1.1 $M_\Gamma = \dfrac{16}{3}(2\sqrt{2}-1)$ 1.2. $x^2+y^2+z^2=4\,,\quad (x-1)^2+y^2=1.$
- **Pregunta 2.** $I = \pi(m+1)$.
- **Pregunta 3.** 3.1. $a = 2m$. 3.2. $U(x,y) = me^{x^2+y^2} + m$. 3.3. $I = m(e^2-1)$.
- **Pregunta 4.** 4.1. Verdadero. 4.2. Falso. 4.3. Verdadero. 4.4. Verdadero.
- **Pregunta 5.** 5.1. Verdadero. 5.2. Falso.
  5.3. $\displaystyle\int_{(x-2)^2/4+y^2/9=1} Pdx + Qdy \;=\; -\pi$. 5.4. $\displaystyle\int_{4(x-1)^2/9+y^2=1} Pdx + Qdy \;=\; 0$.

EC. Segunda prueba común

Problema 1

Sea u un campo escalar de clase uno en $\mathbb{R}^3$ y sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial definido por:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) := \big(u(x,y,z)\,,\,1+y^2\,,\,x^3z^2+1\big)\;.$$

1. Determinar u para que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo en $\mathbb{R}^3$.

2. Sea Γ la curva definida por las ecuaciones:

$$y = x\,, \quad 4xy + 9z^2 + xz(x-y) = 1\,.$$

a) Para $u = x^2z^3$, calcular la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre el arco de Γ que va desde el punto $A := \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right)$ hasta el punto $B := \left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{3}\right)$.

b) Se considera la superficie Σ formada por todos los segmentos que unen los puntos de Γ y el punto $(1,0,0)$ orientada de forma que su normal en el punto A tiene la primera componente positiva.

Calcular el flujo a través de Σ del rotacional del campo vectorial $\boldsymbol{H}$ definido por:

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) := \left(x^2z^3\cos(y-x)\,,\, 1+2xy-y^2\,,\,(y^3z^2+1)e^{x-y}\right)\,.$$

Respuesta.

1. Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo y $\boldsymbol{F}$ es de clase uno, para que este campo sea conservativo es condición suficiente que su rotacional sea cero. Con la notación $\boldsymbol{F} := (L,M,N)$, esto significa que:

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F} &:= \left(\frac{\partial N(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial M(x,y,z)}{\partial z}\,,\,\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial N(x,y,z)}{\partial x}\,,\,\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial L(x,y,z)}{\partial y}\right)\\ &= \left(0\,,\,\frac{\partial u}{\partial z} - 3x^2z^2\,,\,-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (0,0,0)\,.\end{aligned}$$

Por tanto, se tienen que cumplir las dos igualdades siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2z^3\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

De la segunda se deduce que el campo escalar u no puede depender de y. Integrando en la primera con respecto a z se obtiene el valor de u buscado:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2z^2 \implies u(x,y,z) = x^2z^3 + C(x)\,,$$

donde $C(x)$ es cualquier función de clase uno en $\mathbb{R}$ que, en el caso más general posible y debido a la segunda igualdad mencionada, solamente puede depender de x.

Alternativa.

Un procedimiento alternativo al que se acaba de utilizar consiste en recurrir al resultado según el cual en un dominio (abierto conexo) de $\mathbb{R}^3$ (en particular el propio $\mathbb{R}^3$) un campo vectorial continuo es conservativo si y solamente si es un campo de gradientes o, lo que es lo mismo, deriva de un potencial escalar.

En el caso que nos ocupa el campo $\boldsymbol{F} = (L, M, N)$ es de clase uno en $\mathbb{R}^3$ y por tanto continuo. Será entonces conservativo si y sólo si admite un potencial escalar $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^3$; es decir, si y sólo si $\exists \mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla \mathcal{U} := \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right) = (L\,,\, M\,,\, N) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial x} & = \; u, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial y} & = \; 1 + y^2, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial z} & = \; x^3 z^2 + 1. \end{cases}$$

Integrando con respecto a z en la tercera igualdad se obtiene:

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \frac{x^3 z^3}{3} + z + C(x,y)\,,$$

donde $C(x,y)$ es una función cualquiera de clase uno en $\mathbb{R}^2$ que, en el caso más general posible, puede depender de x e y.

Sustituyendo esta expresión de $\mathcal{U}$ en la segunda igualdad e integrando con respecto a y resulta:

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 1 + y^2 \implies C(x,y) = y + \frac{y^3}{3} + K(x)\,,$$

donde $K(x)$ es, en principio, una función de clase uno en $\mathbb{R}$ que en el caso más general posible puede depender de x.

Finalmente, sustituyendo el último valor de $\mathcal{U}$ obtenido en la primera igualdad, se determina el valor de u para que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo:

$$x^2 z^3 + K'(x) = u\,.$$

Como u es, por hipótesis, de clase uno en $\mathbb{R}^3$, $K(x)$ puede ser cualquier función de clase dos en $\mathbb{R}$.

2.1. Esta pregunta se puede responder sin necesidad de haber resuelto el apartado 1.

Para ello es muy conveniente darse cuenta de que, para el valor de $u = x^2 z^3$ que se especifica, el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo, ya que es de clase uno y tiene rotacional nulo en $\mathbb{R}^3$, que es un conjunto simplemente conexo.

Utilizando esta propiedad, se pueden considerar dos formas razonables de responder.

Primera: Calcular un potencial de $\boldsymbol{F}$.

Según se acaba de probar en la respuesta alternativa al apartado 1, un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$ para $u = x^2 z^3$ es

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \frac{x^3 z^3}{3} + z + y + \frac{y^3}{3} + cte,$$

donde *cte* representa una constante que puede elegirse arbitrariamente. Entonces, si representamos por $\Gamma(A,B)$ el arco de la curva Γ, la circulación que se pide es:

$$\int_{\Gamma(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -\frac{5}{24}\,.$$

Segunda: Aprovechar que la circulación de $\boldsymbol{F}$ es independiente del camino que se siga para ir del punto inicial al punto final de la curva.

Entonces, la circulación sobre la curva $\Gamma(A,B)$ que se pide es la misma que se obtiene, por ejemplo, si se calcula sobre el segmento $\overline{AB}$ que une sus extremos, una de cuyas parametrizaciones es:

$$\mathbf{r}(t) \;=\; t(B-A)+A = \left(\frac{1}{2}(1-t)\,,\,\frac{1}{2}(1-t)\,,\,\frac{t}{3}\right)\,,\quad t\in[0,1].$$

Por tanto:

$$\int_{\Gamma(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\overline{AB}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt,$$

donde:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) &= \left(\frac{1}{108}(1-t)^2t^3\,,\,1+\frac{1}{4}(1-t)^2\,,\,\frac{1}{72}(1-t)^3t^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\right)\\ &= -\frac{t^5}{108}+\frac{5t^4}{216}-\frac{t^3}{54}-\frac{13t^2}{108}+\frac{t}{4}-\frac{7}{24}\,,\end{aligned}$$

con lo que, finalmente, se obtiene:

$$\int_{\Gamma(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\overline{AB}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 \left(-\frac{t^5}{108}+\frac{5t^4}{216}-\frac{t^3}{54}-\frac{13t^2}{108}+\frac{t}{4}-\frac{7}{24}\right)dt \;=\; -\frac{5}{24}\,.$$

Alternativa. Si no se tiene en cuenta que $\boldsymbol{F}$ es conservativo queda la alternativa de calcular la circulación usando la definición, que es más ardua desde el punto de vista de los cálculos a realizar.

Para ello es necesario parametrizar el arco $\Gamma(A,B)$ de la curva Γ que es una elipse de semiejes $1/2$ y $1/3$ situada en el plano $y=x$. Por tanto, una de sus posibles parametrizaciones es:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\cos t}{2}\,,\,\frac{\cos t}{2}\,,\,\frac{\operatorname{sen} t}{3}\right)\,,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\,,$$

donde los valores $t=0$ y $t=\pi/2$ son tales que $\mathbf{r}(0)=(1/2,1/2,0)$ y $\mathbf{r}(\pi/2)=(0,0,1/3)$. Es decir, se corresponden con los extremos del arco de la curva $\Gamma(A,B)$ que hay que considerar.

Tras las operaciones pertinentes se llega a que:

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{2}+\frac{\cos t}{3}+\frac{1}{216}\operatorname{sen}^2 t\cos^4 t-\frac{1}{216}\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t-\frac{1}{8}\operatorname{sen} t\cos^2 t\,,$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{\cos t}{3} + \frac{1}{216}\operatorname{sen}^2 t\cos^4 t - \frac{1}{216}\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} t\cos^2 t\right) dt \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{432}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{432}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{16}\beta\left(1,\frac{3}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\beta\left(1,\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{24}\,.
\end{aligned}$$

En esta cadena de igualdades se ha utilizado la función Beta de Euler, $\beta(p,q)$, una de cuyas expresiones es:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t\, \cos^{2q-1} t\, dt\,.$$

Se han usado también la propiedad de simetría $\beta(p,q) = \beta(q,p)$ y su relación con la función Gamma de Euler, $\Gamma(p)$:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Además se ha tenido en cuenta que, para $p > 1$, $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.

2.2. Se podría evitar el cálculo del rotacional de $\boldsymbol{H}$ siempre que fuese posible aplicar el teorema de Stokes. Ahora bien, la superficie Σ es una superficie regular y orientable que tiene por borde orientado la curva Γ definida en el enunciado. Además, el campo $\boldsymbol{H}$ es de clase uno en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, en efecto es posible aplicar el teorema de Stokes, según el cual:

$$\int_\Sigma \nabla\times\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{\sigma} = \int_\Gamma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}\,,$$

donde Σ se considera orientada según se indica en el enunciado y Γ se recorre de acuerdo con la regla del sacacorchos.

Pero Γ es una curva situada en el plano $y = x$ y, sobre este plano, el campo $\boldsymbol{H}$ coincide con el campo $\boldsymbol{F}$ considerado en el apartado 2.1. Por tanto,

$$\int_\Sigma \nabla\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_\Gamma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0\,,$$

dado que Γ es una curva cerrada de clase uno y $\boldsymbol{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

Alternativa.

Si no se tiene en cuenta que $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{F}$ coinciden en el plano $y = x$, se puede calcular la circulación de $\boldsymbol{H}$ sobre Γ aplicando la definición. Para ello hay que utilizar una parametrización de Γ (por ejemplo, la dada en el apartado 2.1 pero con $t\in[0,2\pi]$). En tal caso, tras las operaciones pertinentes, se llega a que:

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{\cos t}{3} + \frac{1}{216}\operatorname{sen}^2 t\cos^4 t - \frac{1}{216}\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} t\cos^2 t\,,$$

y habría que calcular las mismas integrales que en la alternativa descrita en el apartado 2.1 pero ahora con límites 0 y 2π con lo que la circulación resulta ser cero.

Alternativa muy ardua. Aplicar la definición de flujo.

Para ello es necesario calcular el rotacional de $\boldsymbol{H}$ y parametrizar la superficie Σ. No se detallan aquí los cálculos. Solamente mencionaremos que una de las posibles parametrizaciones de Σ se encuentra considerando que está formada por el haz de segmentos que unen el punto $(1,0,0)$ y los puntos de Γ. Si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, es la parametrización de la curva considerada anteriormente pero con $t \in [0, 2\pi]$, entonces una válida para Σ es:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\lambda, t) = \lambda\left(\mathbf{r}(t) - (1,0,0)\right) + (1,0,0)\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \lambda \in [0,1]\,,$$

que está orientada correctamente puesto que, como se puede comprobar mediante los cálculos adecuados, su vector normal $\mathbf{N} = (\partial\boldsymbol{\Sigma}/\partial\lambda) \times (\partial\boldsymbol{\Sigma}/\partial t)$ en el punto A tiene primera componente positiva.

Problema 2

Se consideran los campos escalares:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad g(x,y,z) = \frac{1}{(2x^2+3y^2+z^2)^{3/2}},$$

y los campos vectoriales:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{H} = f\boldsymbol{G}$$

1. Calcular los gradientes de f y g.
2. Calcular las divergencias de $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$.
3. Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{H}$ que sale de la superficie esférica de centro el origen y radio 5.

Solución: Todos los campos del ejercicio, sean escalares o vectoriales, son C^∞ en su dominio de definición, que es $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

1. Calculamos ambos gradientes aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y,z) &= \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x, 2y, 2z)\\ &= \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),\end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \operatorname{grad}(2x^2+3y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(4x,6y,2z)$$
$$= \frac{-3}{(2x^2+3y^2+z^2)^{5/2}}(2x,3y,z).$$

2. Para calcular las divergencias recordemos la fórmula:
$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{V}) = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{V} + u \operatorname{div} \boldsymbol{V}$$
donde u es un campo escalar y $\boldsymbol{V}$ un campo vectorial.
$$\operatorname{div} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} g(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r} + g(\boldsymbol{r}) \operatorname{div}(\boldsymbol{r}) \Rightarrow$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{-3}{(2x^2+3y^2+z^2)^{5/2}}(2x^2+3y^2+z^2) + \frac{3}{(2x^2+3y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$
así pues $\boldsymbol{G}$ es un campo solenoidal en su dominio.
$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{G} + g \operatorname{div} \boldsymbol{G} \Rightarrow$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} \cdot g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} = -\frac{g(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{r}\|} \Rightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{H} = -fg.$$

3. Llamemos S a la superficie esférica y E a la superficie elipsoidal de ecuación $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$, ambas orientadas por el vector normal exterior; observemos que ambas superficies contienen en su interior geométrico el origen, punto en el que el campo $\boldsymbol{H}$ no está definido. Denotamos por $\boldsymbol{I}_d$ la función vectorial identidad $\boldsymbol{I}_d(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$; entonces:
$$\int_S \boldsymbol{H} \overset{(1)}{=} \frac{1}{5}\int_S \boldsymbol{G} \overset{(2)}{=} \frac{1}{5}\int_E \boldsymbol{G} \overset{(3)}{=} \frac{1}{5}\int_E \boldsymbol{I}_d$$
$$\overset{(4)}{=} \frac{1}{5}\iiint_{\operatorname{int}(E)} \operatorname{div} \boldsymbol{I}_d \overset{(5)}{=} \frac{3}{5}\operatorname{vol}\,(\operatorname{int}(E)) \overset{(6)}{=} \frac{2\sqrt{6}\,\pi}{15}$$
Expliquemos cada una de las igualdades anteriores:

(1) El campo escalar f sobre la superficie esférica es constantemente igual a $1/5$.
(2) El campo $\boldsymbol{G}$ es solenoidal en su dominio de definición, por tanto su flujo a través de dos superficies cerradas cualesquiera que contengan al origen es el mismo; sustituimos pues la esfera por el elipsoide.
(3) El campo $\boldsymbol{G}$ coincide con el campo $\boldsymbol{I}_d$ en E ya que sobre E el campo g vale 1.
(4) Aplicamos el teorema de Gauss al campo $\boldsymbol{I}_d$ en la superficie E orientada según el vector normal saliente,
(5) como la divergencia es constante, nos queda un múltiplo del volumen interior al elipsoide, que hemos denotado $\operatorname{int}(E)$.
(6) Por último, el volumen encerrado por un elipsoide es $4\pi/3$ por las longitudes de los semiejes, que en nuestro caso son $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$ y 1.

Examen final

Problema 1

Este problema consta de 5 preguntas sobre cuestiones numéricas y de "verdadero/falso". En algunas cuestiones numéricas aparece un parámetro m que hay que sustituir por el mínimo entre las unidades y decenas de su número de matrícula.

Pregunta 1. Sea D el conjunto del plano definido por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x-2)^2 \leq y + 4, \ \ y \leq 0\}$$

y f una función continua en D. Escribir los límites de integración:

$$\iint_D f = \int \qquad \left(\int \qquad\qquad f(x,y)\ dx \right) dy$$

Pregunta 2. Sea $\boldsymbol{F} = (P\,,\,Q)$ un campo vectorial de clase uno en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que, en este conjunto, sus componentes satisfacen la propiedad:

$$\forall\,(x,y) \in \Omega : \ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,.$$

1. En las condiciones descritas en la figura (a), el valor de la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre las curvas Γ_1 y Γ_2 es el mismo. V ☐ F ☐

2. En las condiciones descritas en la figura (b), sea Γ una curva cerrada y de clase uno contenida en Ω. Entonces se puede afirmar que la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre Γ puede tomar, a lo sumo, siete valores distintos. V ☐ F ☐

3. Se consideran las condiciones descritas en la figura (c). Márquese con aspa las igualdades que sean ciertas:

☐ $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}\,,$

☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}\,,$

Nota: Todas las curvas se suponen simples

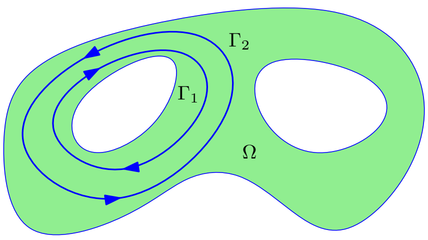


Figura (a)

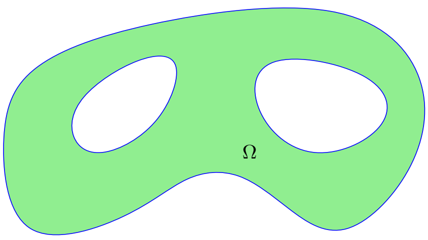


Figura (b)

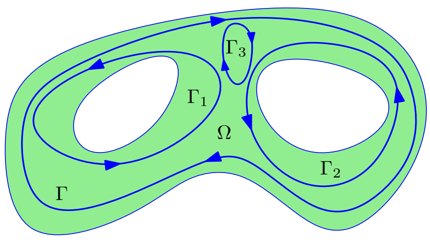


Figura (c)

Pregunta 3. 1. De un campo $\boldsymbol{F}$ se sabe que es de clase 1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0),(2,0,0)\}$, que es solenoidal en dicho conjunto y que su flujo sobre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $(x-2)^2+y^2+z^2=1$, orientadas ambas con la normal saliente, vale m y $m+2$ respectivamente.

Se pide calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ orientada según la normal entrante.

☐

2. De un campo $\boldsymbol{F}$ se sabe que es de clase 1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y que es irrotacional en dicho conjunto. Entonces se puede asegurar que la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

es nula. V ☐ F ☐

Pregunta 4. Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}$, definido para $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$, y los casquetes esféricos:

- S_1: $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 1$, orientado según la normal saliente a la esfera.
- S_2: $x^2+y^2+z^2=4$, $z \leq 1$, orientado según la normal entrante a la esfera.

Se pide:

1. Decir si el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de estos dos casquetes es IGUAL o DISTINTO.

☐

2. Calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través del casquete S_1.

☐

Pregunta 5. Se considera el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$$

y un cubo regular de lado $m+1$ centrado en el origen. Se pide:

a) El flujo total del campo $\boldsymbol{F}$ saliente del cubo. ☐

b) La suma de las 6 circulaciones del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo del borde de cada una de las caras del cubo, en el sentido inducido por la normal saliente al cubo.

☐

Respuesta:

- **Pregunta 1.** $\iint_D f = \int_{-4}^{0} \left(\int_{2-\sqrt{y+4}}^{2+\sqrt{y+4}} f(x,y)\, dx \right) dy.$
- **Pregunta 2.** 2.1. Falso. 2.2. Verdadero.

$$\square \quad \int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}\,,$$
$$\boxtimes \quad \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}\,,$$

- **Pregunta 3.** 3.1. El flujo vale $-2m - 2$. 3.2. Verdadero.
- **Pregunta 4.** 4.1. DISTINTO. 4.2. π.
- **Pregunta 5.** 5.1. $3(m+1)^3$. 5.2. 0.

Problema 2

Sea el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{(x-y, y-z, z-x)}{x^2+y^2+z^2}$$

y la esfera de radio m centrada en el origen.
Se pide:

1. La divergencia de $\boldsymbol{F}$ y su dominio de definición.
2. El flujo del campo $\boldsymbol{F}$ saliente a través de la esfera.
3. La circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva intersección de la esfera con el plano $z = 0$, recorrida en sentido positivo.

Respuesta:

1. El campo $\boldsymbol{F}$ es de clase ∞ en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ menos en el origen que no esta definido por tanto el dominio de la divergencia del campo es:

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$$div\ \boldsymbol{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3$$

Cambiando de notación

$$F_k = \frac{x_k - x_{k+1}}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \text{ y } \; x_4 = x_1$$

$$D_k F_k = \frac{1\,\|\boldsymbol{x}\|^2 - (x_k - x_{k+1})\,2x_k}{\|\boldsymbol{x}\|^4}$$

$$div\ \boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{3} D_k F_k = \frac{3\,\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2x_k x_{k+1}}{\|\boldsymbol{x}\|^4} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}$$

2. Claramente no se puede aplicar el Teorema de Gauss

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \frac{(x, y, z)}{\|\boldsymbol{x}\|^2} - \frac{(y, z, x)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F d\sigma} &= \iint_S (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\ d\sigma = \iint_S \left\langle \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\rangle dS = \\ &= \iint_S \left\langle \boldsymbol{F}_1, \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\rangle dS + \iint_S \left\langle \boldsymbol{F}_2, \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\rangle dS = \\ &= \iint_S \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x}\|}\ dS - \iint_S \frac{xy + yz + xz}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\ dS\end{aligned}$$

La segunda integral es 0 debido a la simetría de la esfera con respecto a las tres variables y la imparidad de cada uno de los sumandos con respecto a una de las variables, en realidad a dos pero con una es suficiente.

$$\iint_S \boldsymbol{F d\sigma} = \iint_S \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x}\|}\ dS = \iint_S \frac{\boldsymbol{1}}{m}\ dS = \frac{1}{m} 4\pi m^2 = 4\pi m$$

3.

A) Sin utilizar el Teorema de Stokes.

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\ d\ell &= \int_C \langle \boldsymbol{F}, T_u \rangle\ ds = \int_C \left\langle \frac{(x - y, y - z, z - x)}{x^2 + y^2 + z^2}, T_u \right\rangle ds \\ &= \int_C \left\langle \frac{(x - y, y, -x)}{x^2 + y^2}, \frac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rangle ds = \\ &= \int_C \frac{(-xy + y^2 + xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ds = \frac{1}{m} \int_C \frac{y^2}{m^2}\ ds = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \frac{m^2 \text{sen}^2\theta}{m^2}\ m d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\ d\theta = \\ &= \pi\end{aligned}$$

Se puede obtener el mismo resultado calculando la integral curvilínea de $\boldsymbol{F}_2$ ya que $\boldsymbol{F}_1$ es conservativo por tratarse de un campo central y la curva es cerrada.

B) Utilizando el teorema de Stokes. Se puede considerar una superficie regular que no pase por el origen y cuyo borde orientado sea la curva descrita en el enunciado.

Una de estas superficies es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$, $z \geq 0$, que debe orientarse según el vector normal saliente a la esfera que la contiene.

$$\int_C \boldsymbol{F}\ d\ell = \int_E rot\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\sigma}$$

$$= \int_E \left(\frac{(x+y)^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{(y+z)^2 - x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{(x+z)^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right) \cdot \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{m^5} \int_E \left((x+y)^2 - z^2\,,\ (y+z)^2 - x^2\,,\ (x+z)^2 - y^2 \right) \cdot (x,y,z)\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{m^5} \int_E (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\, d\sigma \ =\ \frac{1}{m^3} \int_E z\, d\sigma \ =\ \frac{1}{m^3}(\pi m^3) \ =\ \pi\,.$$

Problema 3

Este problema consta de dos apartados independientes.

3.1. Calcular el volumen del sólido encerrado por las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones

$$\Sigma_1 : x^2 + 4y^2 + 8z = 8\,,$$
$$\Sigma_2 : y + z = 1\,.$$

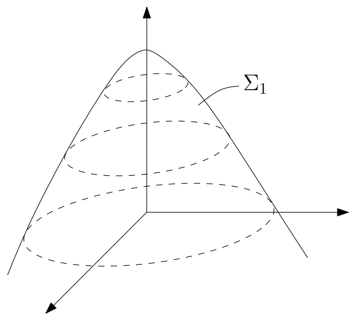
3.2. Sea Σ la porción del plano de ecuación $2x + y + 3z = 1$ contenido en el primer octante. En cada punto de Σ hay definida una densidad de carga que es proporcional a la suma de las distancias del punto a los planos XZ y YZ. Se pide calcular la carga total de la superficie Σ.

Respuesta:

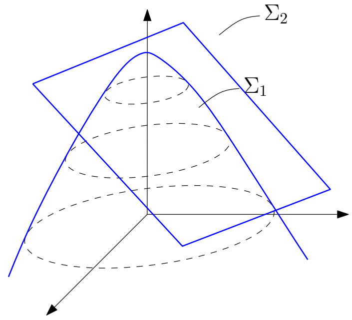
1. La superficie Σ_1 es un paraboloide elíptico invertido. Para comprobarlo basta con cortar por planos $z = \lambda$, con lo que se obtienen las curvas Γ_λ

$$x^2 + 4y^2 = 8 - 8\lambda\,,$$
$$z = \lambda\,.$$

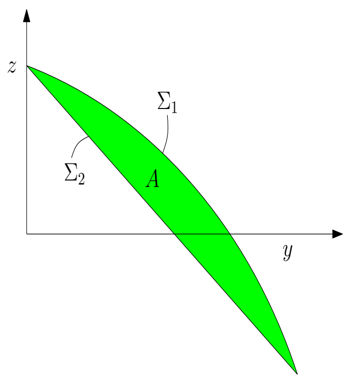
Vemos que Γ_λ es una elipse cuyos semiejes decrecen cuando z aumenta. Como $8 - 8\lambda$ no puede volverse negatico (el miembro de la derecha es una cantidad no negativa) el valor máximo que puede tomar z es $z = 1$.



La superficie Σ_2 es claramente un plano inclinado



Por tanto, el sólido A que indica el enunciado es el que se muestra, proyectado sobre el plano YZ, en la siguiente figura



Por el tipo de superficies, parece que la mejor opción para calcular el volumen de A es fijar x e y e integrar en z, es decir,

$$Vol(A) = \iint_B \left(\int_{z_{\text{plano}}}^{z_{\text{parab}}} dz \right) dxdy$$

donde B es el recinto resultado de proyectar A sobre el plano XY.

Sea Γ la curva intersección de las dos superficies, cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 8z &= 8\,, \\ y + z &= 1\,. \end{aligned}$$

Claramente B es el recinto limitado por la curva Γ' proyeccción de Γ sobre el plano XY. Para calcular Γ' eliminamos la z entre las dos ecuaciones anteriores, y se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 8y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

cuya ecuación como curva en $\mathbb{R}^2$ es $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$ o, lo que es lo mismo,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$$

que es una elipse cuyo centro está en el punto $(0, 1)$.

Por ello

$$Vol(A) = \iint_B \left(\int_{z_{\text{plano}}}^{z_{\text{parab}}} dz \right) dxdy = \iint_B (z_{\text{parab}} - z_{\text{plano}})\, dxdy \tag{5}$$

donde B está definido por $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

Así

$$Vol(A) = \iint_B \left(\frac{1}{8}\left(8 - x^2 - 4y^2\right) - (1-y) \right) dxdy = \iint_B \left(-\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + y \right) dxdy$$

Hacemos el siguiente cambio $(x, y) = \phi(\rho, \theta)$ a elípticas

$$\begin{aligned} x &= 2\rho \cos\theta \\ y &= 1 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{6}$$

para el que el jacobiano es 2ρ. El antitransformado del conjunto B es el rectángulo

$$\phi^{-1}(B) = \{(\pi, \theta) : \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, 1]\}$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} Vol(A) &= \iint_{\phi^{-1}(B)} \left(-\frac{\rho^2 \cos^2\theta}{2} - \frac{1 + 2\rho \operatorname{sen}\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2} + \rho \operatorname{sen}\theta + 1 \right) 2\rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Otra posibilidad, menos directa, para calcular el volumen es separar en (5) en dos integrales, es decir,

$$Vol(A) = \iint_B \left(\int_{z_{\text{plano}}}^{z_{\text{parab}}} dz \right) dxdy = \underbrace{\iint_B z_{\text{parab}} dxdy}_{\substack{\| \\ V_1}} - \underbrace{\iint_B z_{\text{plano}} dxdy}_{\substack{\| \\ V_2}}$$

Ahora

$$V_1 = \iint_B z_{\text{parab}} dxdy = \iint_B \frac{1}{8}\left(8 - x^2 - 4y^2\right) dxdy = \frac{1}{8}\iint_B \left(8 - x^2 - 4y^2\right) dxdy$$

Para calcular esta integral hacemos el cambio a elípticas (6) y tenemos

$$V_1 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\frac{\rho^2 \cos^2\theta}{2} - \frac{1 + 2\rho \operatorname{sen}\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2} + \rho \operatorname{sen}\theta + 1 \right) 2\rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{2}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4\rho - 4\rho^3 - 8\rho^2 \operatorname{sen}\theta\right) d\rho d\theta = \frac{2}{8}\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(4\rho - 4\rho^3 - 8\rho^2 \operatorname{sen}\theta\right) d\theta \right] d\rho =$$

$$= \frac{2}{8}\int_0^1 \left[2\pi\left(4\rho - 4\rho^3\right) - 8\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta}_{\substack{\| \\ 0}} \right] d\rho = \frac{2 * 2\pi * 4}{8}\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{2 * 2\pi * 4}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Por otro lado,

$$V_2 = \iint_B z_{\text{plano}} dxdy = \iint_B (1 - y)\, dxdy$$

Para calcular la integral doble anterior tenemos distintas posibilidades. Una es hacer el cambio a elípticas (6)

$$x = 2\rho\cos\theta$$
$$y = 1 + \rho \operatorname{sen}\theta$$

con lo que

$$V_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\rho \operatorname{sen}\theta 2\rho d\rho d\theta = -\int_0^1 \rho^2 \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta}_{\substack{\| \\ 0}} \right] d\rho = 0$$

Otra posibilidad es usar que

$$V_2 = \iint_B (1 - y)\, dxdy = \underbrace{\iint_B dxdy}_{\substack{\| \\ Area(B)}} - \underbrace{\iint_B ydxdy}_{\substack{\| \\ Area(B) * y_B(B)}} = 2\pi - 2\pi * 1 = 0$$

donde hemos usado que el área de B es 2π.

Por tanto,

$$Vol(A) = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2. La densidad de carga es

$$\rho(x, y, z) = C\,(x + y)$$

donde C es la constante de proporcionalidad.

Así tenemos que la carga total de la superficie Σ es

$$Q = \int_\Sigma \rho(x, y, z) d\sigma = C \int_\Sigma (x + y)\, d\sigma$$

Para calcular esta integral de superficie tenemos que parametrizar la misma. Para ello podemos usar que Σ se puede expresar mediante una ecuación cartesiana explícita,

$$z = h(x, y) = \frac{1}{3}\,(1 - 2x - y)\,,\ (x, y) \in D$$

donde D es la proyección de Σ sobre el plano XY, es decir, la región $D = \{(x, y) : 2x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$.

Entonces una parametrización $(x, y, z) = \vec{\phi}\,(x, y)$ para Σ es

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = h(x, y) = \frac{1}{3}\,(1 - 2x - y) \end{array} \right. \quad : \ (x, y) \in D$$

Ahora consideremos

$$\vec{N}(x, y) := \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x}\,(x, y) \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y}\,(x, y) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\,(x, y)\,, -\frac{\partial h}{\partial y}\,(x, y)\,, 1 \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right)$$

Obsérvese que, como estamos trabajando con una integral de superficie de un campo escalar, es indiferente la orientación de la superficie, es decir, podemos trabajar con el vector $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ o con $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$.

Por lo tanto,

$$\left\| \vec{N}(x, y) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} Q = \int_\Sigma \rho(x, y, z) d\sigma = C \iint_D (x + y)\, \frac{\sqrt{14}}{3} dxdy = \\ = \frac{\sqrt{14}}{3} C \iint_D (x + y)\, dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3} C \iint_D (x + y)\, dxdy = \\ = \frac{\sqrt{14}}{3} C \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-2x} (x + y)\, dy \right) dx = \cdots = \frac{\sqrt{14}}{24} C \end{aligned}$$

Convocatoria extraordinaria

Problema 1

Este problema consta de 5 preguntas sobre cuestiones numéricas y de "verdadero/falso".

Pregunta 1. Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 + 9y^2}(-y, x)$ definido para $(x, y) \neq (0, 0)$, y las siguientes curvas planas, orientadas positivamente:

- La circunferencia C_1: $x^2 + y^2 = 25$.
- La elipse C_2: $4x^2 + 9y^2 = 1$

  Se pide:

1. Decir si la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de estas dos curvas es IGUAL o DIFERENTE.

   [ ]

2. Calcular la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la circunferencia C_1.

   [ ]

Pregunta 2.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo y $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase uno en Ω. Entonces, si $\boldsymbol{F}$ es irrotacional en Ω, también es conservativo en Ω. V [ ] F [ ]
2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase uno en Ω. Entonces, si $\boldsymbol{F}$ admite un potencial vector en Ω , también es solenoidal en Ω. V [ ] F [ ]
3. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase 1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de cualquier superficie cerrada que contenga al origen en su interior, es el mismo (salvo signo).

   V [ ] F [ ]
4. Todo campo central es irrotacional y admite un potencial vector en el dominio en el que el campo es de clase uno. V [ ] F [ ]

Pregunta 3. Se considera una pirámide maciza de base cuadrangular y tal que todas las aristas de la misma tienen longitud $\sqrt{2}$.

1. La altura de la pirámide es 1. V [ ] F [ ]
2. Calcular la masa de la pirámide sabiendo que la densidad en un punto de la piramide es 4 veces la distancia a la base.

   [ ]

Pregunta 4. Sea $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}$ y g la transformación dada por $g(u,v,w) = (u\cos v \operatorname{sen} w, u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, u\cos w)$. Escribir el conjunto antitransformado por g de Ω:

$$g^{-1}(\Omega) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,/ \quad \leq v \leq \quad , \quad \leq w \leq \quad , \quad \leq u \leq \quad \}$$

Pregunta 5.

1. Sea $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ una cierta función de clase 1, $\vec{r} = (x,y,z)$ y $r = \|\vec{r}\|$. Se pide calcular el flujo de $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\vec{r}$ sobre la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$ orientada según la normal saliente.

   [ ]

2. La circulación del campo $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ sobre cualquier curva no cerrada contenida en la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$ es nula. V ☐ F ☐

Respuesta:

- **Pregunta 1.** 1.1. IGUAL. 1.2. $\pi/3$.
- **Pregunta 2.** 2.1. Falso. 2.2. Verdadero. 2.3. Falso. 2.4. Falso.
- **Pregunta 3.** 3.1. Verdadero. 3.2. 2/3.
- **Pregunta 4.**

  $$g^{-1}(\Omega) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,/ \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad , \ 0 \leq w \leq \frac{\pi}{3} \quad , \ \frac{1}{\cos w} \leq u \leq 2 \quad \}$$

- **Pregunta 5.** 5.1. $4\pi g(1)$. 5.2. Verdadero.

Problema 2

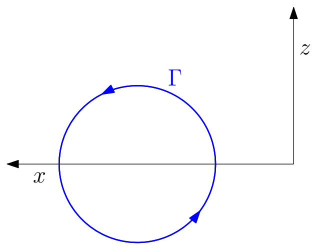
Sea S la superficie tórica de ecuación

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - 5\right)^2 + z^2 = 9$$

y sea $\boldsymbol{F}$ el campo

$$\boldsymbol{F} = \left(xy + z,\ yz^2,\ zx\right) .$$

Sea Γ la curva que resulta de la intersección del plano $y = 0$ con la porción de S contenida en el semiespacio $x \geq 0$ y orientada como muestra la figura.

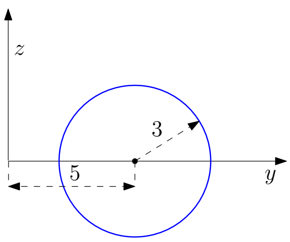


Se pide:

1. Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ saliente de la superficie S.
2. Calcular, utilizando la definición, la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva Γ.
3. Hallar la circulación del apartado 2 calculando una cierta integral de superficie.

Respuesta:

La superficie S es el toro generado cuando la circunferencia de la siguiente figura gira alrededor del eje z



1. El campo $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}^3$ y por ello el flujo está bien definido. El ejercicio se puede resolver calculando el flujo usando la definición. Para ello habría que hallar una parametrización $(x, y, z) = \boldsymbol{\phi}(u, v),\ (u, v) \in D$ de la superficie y calcular el vector

$$\boldsymbol{N}(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial v}$$

lo que no parece muy sencillo.

Como la superficie tórica S es cerrada y $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}^3$ se puede aplicar el teorema de Gauss al interior V de S con lo que tenemos

$$I := \iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\ dV = \iiint_V \left(y + z^2 + x\right) dV$$

Como V es simétrico respecto de los tres planos coordenados y las funciones x e y son impares en x e y respectivamente, tenemos que sus integrales sobre V se anulan y por ello

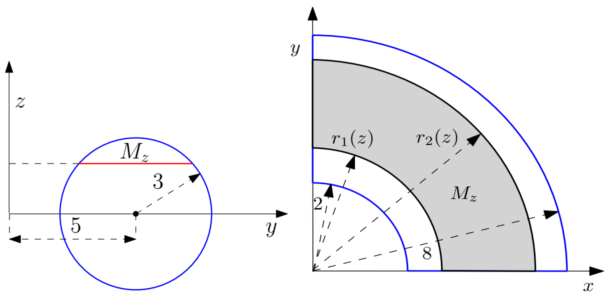
$$I = \iiint_V z^2 dV$$

Usando la paridad de z^2 respecto de z y la simetría de V tenemos

$$I = 8 \iiint_{V^*} z^2 dV$$

donde V^* es la porción de V contenida en el primer octante.

Para calcular la integral anterior hay distintas posibilidades. Veremos tres de ellas:
a. Fijar z e integrar en x e y. Entonces, si denotamos M_z a la intersección de V^* con un plano horizontal a una altura z



tenemos

$$I = 8 \iiint_{V^*} z^2 dV = 8 \int_0^3 z^2 \left(\iint_{M_z} dxdy \right) dz = 8 \int_0^3 z^2 \acute{A}rea(M_z) dz$$

M_z es un cuarto de una corona circular. De la ecuación de S tenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \pm \sqrt{9 - z^2}$$

con lo que los radios de los círculos interior e exterior de M_z son

$$r_1(z) := 5 - \sqrt{9 - z^2} \quad ; \quad r_2(z) := 5 + \sqrt{9 - z^2}$$

y por tanto

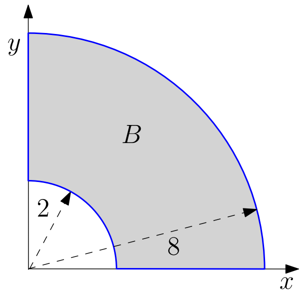
$$\acute{A}rea(M_z) = \frac{\pi}{4} \left(5 + \sqrt{9 - z^2} \right)^2 - \frac{\pi}{4} \left(5 - \sqrt{9 - z^2} \right)^2 = \cdots = 5\pi\sqrt{9 - z^2}$$

Así

$$I = 8 \int_0^3 z^2 \acute{A}rea(M_z) dz = 40\pi \int_0^3 z^2 \sqrt{9 - z^2} dz \underset{\text{cambio } z=3\,\text{sen}\,\theta}{\overset{\uparrow}{=}} 40\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\,\text{sen}\,\theta)^2 \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta}\, 3\cos\theta d\theta =$$

$$= 40\pi 81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\theta \cos^2\theta d\theta = 40\pi 81 \frac{1}{2} \beta(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = 40\pi 81 \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 40\pi 81 \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2} = \frac{405}{2}\pi^2$$

b. Fijar x e y e integrar en z. Denotemos B a la proyección de V^* sobre el plano XY, que es un cuarto de corona circular con radios interior y exterior 2 y 8



Sea $z_{toro} = \sqrt{9 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - 5\right)^2}$ la altura z que corresponde a cada (x, y) de B. Así tenemos

$$I = 8 \iiint_{V^*} z^2 dV = 8 \iint_B \left(\int_0^{z_{toro}} z^2 dz \right) dxdy = \frac{8}{3} \iint_B z_{toro}^3 dxdy = \frac{8}{3} \iint_B \left(9 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - 5 \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

Esta integral se calcula mediante un cambio a polares

$$I = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^8 \left(9 - (\rho-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho d\theta = \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} \int_2^8 \left(9 - (\rho-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio } \rho-5=t}}{=} \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} \int_{-3}^3 \left(9 - t^2\right)^{\frac{3}{2}} (t+5)\, dt$$

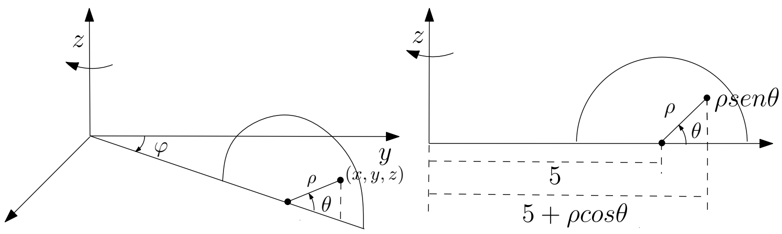
$$= \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} \left(\int_{-3}^3 \left(9-t^2\right)^{\frac{3}{2}} tdt + 5 \int_{-3}^3 \left(9-t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt \right) = \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} 10 \int_0^3 \left(9-t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt$$

donde se ha usado que la primera integral se anula al ser el intervalo de integración simétrico respecto del origen y la función subintegral impar. Ahora haciendo el cambio $z = 3 \operatorname{sen} \theta$ tenemos

$$I = \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} 10 * 81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{3}\frac{\pi}{2} 10 * 81 \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \cdots = \frac{405}{2}\pi^2$$

c. Hacer un cambio de variable que transforme el toro en un rectángulo. Utilizaremos que el sólido V^* se puede parametrizar usando 3 variables que tienen una interpretación geométrica muy clara y usaremos dicha parametrización para hacer un cambio de variable que transforme el toro en un rectángulo.

Consideremos las variables ρ, θ y φ definidas en la siguiente figuras:



Usando las 3 variables anteriores, los puntos de V se pueden describir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= (5+\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (5+\rho\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \qquad \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,3]. \\ z &= \rho\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Si quisiésemos hallar una parametrización del toro bastaría con tener en cuenta que los puntos de la superficie tórica S corresponden a hacer $\rho = 3$ en la expresión anterior, es decir,

$$\begin{aligned} x &= (5+3\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (5+3\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \ :\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,2\pi] \\ z &= 3\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Si definimos el cambio $(x,y,z) = T(\rho,\theta,\varphi)$ dado por las ecuaciones (7), tenemos que $T^{-1}(V) = \underbrace{[0,3]}_{\rho}\times\underbrace{[0,2\pi]}_{\theta}\times\underbrace{[0,2\pi]}_{\varphi}$, es decir, la imagen inversa de V por la transformación T es un rectángulo. De la misma forma $T^{-1}(V^*) = \underbrace{[0,3]}_{\rho}\times\underbrace{[0,\pi]}_{\theta}\times\underbrace{[0,\pi/2]}_{\varphi}$.

El jacobiano del cambio es

$$JT = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - 5\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi + 5\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - \rho^2\cos^2\theta\cos\theta - 5\rho = -\left(\rho^2\cos\theta + 5\rho\right)$$

con lo que $|JT| = |-(\rho^2\cos\theta+5\rho)| = (\rho^2\cos\theta + 5\rho) = \rho\,(\rho\cos\theta+5)$ que sólo se anula cuando$\rho = 0$. Además, el cambio es inyectivo salvo en la frontera de $T^{-1}(V^*)$ con lo que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de cambio de variable en integrales múltiples.

Por lo tanto

$$I = 8\iiint_{V^*} z^2 dV = 8\iiint_{T^{-1}(V^*)} \left(\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\left(\rho^2\cos\theta+5\rho\right) d\rho d\theta d\varphi =$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^3 \left(\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\left(\rho^2\cos\theta+5\rho\right)\ d\rho d\theta d\varphi = 8\frac{\pi}{2}\int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\rho^4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 5\rho^3\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta d\rho =$$
$$= 8\frac{\pi}{2}\int_0^3\int_0^{\pi}\left(5\rho^3\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta d\rho$$

pues, al ser la integral en $[0,\pi]$ del producto de una potencia del seno por una potencia impar del coseno, la integral $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta$ es nula.

En definitiva,

$$I = 8\frac{\pi}{2}5\int_0^3 \rho^3 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta = \cdots = \frac{405}{2}\pi^2$$

2. La curva Γ' con ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3\cos t \\ y &= 0 \qquad\quad t \in [0, 2\pi] \\ z &= 3\,\mathrm{sen}\, t \end{aligned}$$

corresponde a la curva Γ recorrida en sentido contrario. Por ello

$$C := \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\Gamma'} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{\Gamma'}} \left(xy+z,\ yz^2,\ zx\right)\cdot d\boldsymbol{r} \underset{\substack{\uparrow \\ y=0 \text{ en } \Gamma}}{=} -\int_{\boldsymbol{\Gamma'}} (z,\ 0,\ zx)\cdot \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{r} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (3\,\mathrm{sen}\, t, 0, (3\,\mathrm{sen}\, t)\,(5+3\cos t))\cdot(-3\,\mathrm{sen}\, t, 0, 3\cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-9\,\mathrm{sen}^2 t + 45\,\mathrm{sen}\, t\cos t + 27\,\mathrm{sen}\, t\cos^2 t\right) dt =$$

$$= -\left(-9\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 t dt + 45\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\, t\cos t dt}_{\substack{\| \\ 0}} + 27\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\, t\cos^2 t dt}_{\substack{\| \\ 0}}\right) = 9\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 t dt = 9\pi$$

---

3. Sea Π la superficie correspondiente a la porción del plano XZ contenida dentro de Γ. Claramente si orientamos Π con el vector $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$, Γ es el borde orientado de la superficie Π. Como $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en todo $\mathbb{R}^3$ tenemos que *se puede aplicar el teorema de Stokes al campo $\boldsymbol{F}$ y la superficie* Π. El rotacional de $\boldsymbol{F}$ está dado por

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = \cdots = (-2yz, 1-z, x)$$

con lo que

$$\begin{aligned} C &:= \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\ \boldsymbol{r} = \int_\Pi \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} d\sigma = \int_\Pi (-2yz, 1-z, x)\cdot(0,1,0)\, d\sigma = \\ &= \int_\Pi (1-z)\, d\sigma = \int_\Pi d\sigma - \int_\Pi z d\sigma = \acute{A}rea(\Pi) - 0 = 9\pi \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\int_\Pi z d\sigma = 0$ al ser z impar en z y Π simétrica respecto del plano $z=0$. Como debe ser, se ha obtenido el mismo resultado que en el apartado 2.

Problema 3

Se considera el sólido Ω interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, limitado por la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y por el plano XOY.

1. Calcular el volumen de Ω.
2. Hallar el área de su superficie lateral cilíndrica.
3. Sea

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(0, 0, z + b + \frac{x-1}{y+2}\right)$$

el campo de velocidades de un fluido. Determinar b para que el caudal neto que atraviesa la tapa superior de Ω sea nulo.

Respuesta:

1. La ecuación del cilindro es $x^2+y^2 = 2x$, que podemos reescribir como $(x-1)^2+y^2 = 1$. Así pues, el sólido considerado es

$$\Omega = \{(x, y, z) : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

luego es un recinto proyectable sobre el disco plano $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Así pues:

$$Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iint_{D} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right) dxdy = \iint_{D} \sqrt{x^2+y^2} dxdy.$$

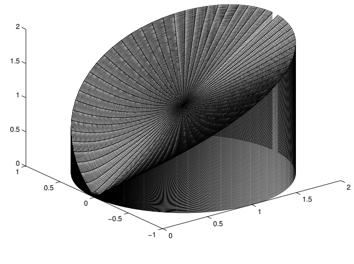
Para calcular esta integral doble, podemos cambiar a coordenadas polares en D, donde se verifica que

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + y^2 \leq 1 &\Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 \leq 2x &\Leftrightarrow \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta&.\end{aligned}$$

Así, para cada ángulo θ con $\cos\theta \geq 0$ (es decir, para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) se tiene $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$. Por tanto, la integral queda

$$\begin{aligned}Vol(\Omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\theta)^3 d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(1 - \text{sen}^2\theta\right) d\theta = \frac{32}{9}.\end{aligned}$$

Aunque no es necesario para resolver este problema, adjuntamos la representación geométrica de este sólido Ω, donde se aprecia su tapa superior y su superficie lateral cilíndrica.



2. PRIMER MÉTODO: La superficie lateral cilíndrica de Ω es

$$\Sigma = \{(x,y,z): \ (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

que admite de forma natural la siguiente parametrización:

$$\phi(t,z) = (1+\cos t, \text{sen } t, z), \quad t \in [0,2\pi], z \in [0, \sqrt{2+2\cos t}].$$

El límite superior de z procede del hecho de que

$$0 \le z \le \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{(1+\cos t)^2 + \text{sen}^2 t} = \sqrt{2+2\cos t}.$$

Pues bien, basta aplicar la fórmula general del área de una superficie parametrizada:

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2+2\cos t}} \left\| \frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial z}\right\| \, dz \, dt.$$

Fácilmente se obtiene que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = (-\text{sen } t, \cos t, 0), \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = (0,0,1)$$

que son ortogonales y unitarios, luego su producto vectorial $\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial z}$ tiene norma 1 (obsérvese que no es necesario calcular explícitamente este vector, que resulta ser

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial z} = (\cos t, \text{sen } t, 0) \tag{8}$$

y es unitario). Por tanto,

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2+2\cos t}} 1 \, dz \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t} \, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t} dt =$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8.$$

SEGUNDO MÉTODO (como integral curvilínea): De la superficie cilíndrica que se apoya sobre la curva $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ $(z=0)$, la superficie Σ es la porción comprendida entre las gráficas de las funciones $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $g(x,y) = 0$. Por ello, puede calcularse el área de Σ como la siguiente integral curvilínea sobre C:

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \int_C (h-g) \, dl = \int_C \sqrt{x^2+y^2} dl.$$

Si se hace de esta forma, entonces hay que parametrizar la curva C, como curva en el plano $\mathbb{R}^2$:

$$(x(t), y(t)) = (1+\cos t, \text{sen } t) \qquad t \in [0,2\pi]$$

y su vector derivada es $(x'(t), y'(t)) = (-\text{sen } t, \cos t)$ que tiene módulo 1. Por todo ello,

$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea\,(\Sigma) &= \int_C \sqrt{x^2+y^2}dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos t)^2 + \text{sen }^2 t}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t}dt = \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8.
\end{aligned}
$$

Se llega al mismo resultado mediante ambos métodos.

3. PRIMER MÉTODO (utilizando el Teorema de Gauss): El campo $\boldsymbol{F}$ está definido en $\mathbb{R}^3$ excepto en el plano $y = -2$. En Ω todos los puntos verifican $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, lo que implica que $-1 \leq y \leq 1$, luego $\boldsymbol{F}$ está definido y es de clase C^1 en el sólido Ω. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Gauss, que garantiza que

$$\int_S \boldsymbol{F}\ d\,\boldsymbol{s} + \int_B \boldsymbol{F}\ d\boldsymbol{s} + \int_\Sigma \boldsymbol{F}\ d\,\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega div\,(\boldsymbol{F})\,dxdydz$$

donde las superficies del primer miembro (tapa superior S, tapa inferior B y lateral Σ) están orientadas hacia el exterior de Ω. Además, $div\,(\boldsymbol{F}) = 1$, con lo que

$$\iiint_\Omega div\,(\boldsymbol{F})\,dxdydz = Vol\,(\Omega) = \frac{32}{9}.$$

Así pues,

$$\int_S \boldsymbol{F}\ d\,\boldsymbol{s} = \frac{32}{9} - \int_\Sigma \boldsymbol{F}\ d\,\boldsymbol{s} - \int_B \boldsymbol{F}\ d\boldsymbol{s}.$$

Por un lado, la superficie cilíndrica lateral Σ es recta, y $\boldsymbol{F}$ es un campo de dirección vertical, luego el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ es nulo; en otras palabras, $\boldsymbol{F}$ es tangente a Σ en cada punto (o bien es ortogonal al vector normal a Σ en cada punto; recordemos que dicho vector normal viene dado por la ecuación (8), y es un vector con tercera componente nula). Por todo ello, $\int_\Sigma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = 0$ y tenemos que

$$\int_S \boldsymbol{F}\ d\,\boldsymbol{s} = \frac{32}{9} - \int_B \boldsymbol{F}\ d\boldsymbol{s}.$$

Queda, pues, calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ en la base inferior de Ω, que es el círculo $B : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ contenido en el plano $z = 0$, con vector normal saliente $(0,0,-1)$. Dicha integral de superficie queda

$$
\begin{aligned}
\int_B \boldsymbol{F}\ d\boldsymbol{s} &= \iint_D \left(0,0,0+b+\frac{x-1}{y+2}\right)\cdot(0,0,-1)\ dxdy = \\
&= -b\acute{A}rea\,(D) - \iint_D \frac{x-1}{y+2}dxdy = \\
&= -b\pi - \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos\theta}{r\text{sen }\theta+2}d\theta\right)dr = -b\pi
\end{aligned}
$$

donde se ha realizado en D el cambio a polares $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$ y se ha obtenido una integral nula en $[0, 2\pi]$.

Concluimos que

$$\int_S \boldsymbol{F}\ d\ \boldsymbol{s} = \frac{32}{9} + b\pi$$

y para que dicho flujo sea nulo, se tiene finalmente que

$$b = -\frac{32}{9\pi}.$$

SEGUNDO MÉTODO: Podemos calcular directamente el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la tapa superior S del sólido:

$$S = \{(x, y, z) : \ \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

que es la gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definida sobre el círculo de $\mathbb{R}^2$, D : $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. De esta forma, una parametrización natural es

$$\Phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad (x, y) \in D$$

y el vector normal asociado a la parametrización resulta ser

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$$

válido en todo punto de S exceptuando el origen (no obstante, la integral de superficie que obtendremos es continua en todo punto de S).

En este apartado nos piden que el flujo a través de S sea nulo, con lo cual nos es indiferente la orientación de esta superficie (en particular, este es el vector normal que apunta hacia el exterior del sólido Ω). Calculemos dicho flujo:

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{F}\ d\boldsymbol{s} &= \iint_D \left(0, 0, \sqrt{x^2 + y^2} + b + \frac{x-1}{y+2}\right) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) dxdy = \\
&= \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} + b + \frac{x-1}{y+2}\right) dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy + b\acute{A}rea\,(D) + \iint_D \frac{x-1}{y+2} dxdy
\end{aligned}$$

donde la primera integral doble es aquella ya calculada en el apartado 1, y coincide con el volumen de Ω, que es $\frac{32}{9}$. En cuanto a la última integral doble, realizando en D el cambio a polares $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$ se tiene que

$$\int\int_D \frac{x-1}{y+2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos\theta}{r\text{sen }\theta + 2} d\theta\right) dr = \int_0^1 r\ \log\left(r\text{sen }\theta + 2\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\ dr = \int_0^1 0\ dr = 0.$$

Finalmente,

$$\int_S \boldsymbol{F} \; d\,\boldsymbol{s} = \frac{32}{9} + b\pi = 0$$

de donde

$$b = -\frac{32}{9\pi}.$$

Curso 2013/14

EC. Primera prueba común

Pregunta 1. Sea el conjunto:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Se considera la función $d(x, y)$ que indica la distancia del punto (x, y) al centro de coordenadas. Calcular:

$$\boxed{\iint_D d^2(x, y)\, dxdy = \qquad\qquad}$$

Pregunta 2. Sea Ω el recinto del primer octante acotado por las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = z^2$ y $z = 1$.

1. Escribir los límites de integración:

$$\iiint_\Omega f = \int \quad \left[\int \quad \left(\int \qquad f(x, y, z)\, dy \right) dx \right] dz$$

2. Sea g la transformación dada por $g(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$. Escribir el conjunto antitransformado por g de Ω:

$$g^{-1}(\Omega) = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,/ \qquad \leq \varphi \leq \qquad , \qquad \leq \theta \leq \qquad , \qquad \leq \rho \leq \qquad \}$$

Pregunta 3. Sea Γ el arco de curva de ecuaciones $2y = x^2$, $3z = x^3$ limitado por los planos $x = 0$ y $x = 1$. Se pide:

1. Hallar la integral de la función $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}$ a lo largo de la curva Γ.

2. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z, 2y, -x)$ para mover una partícula del punto $(0,0,0)$ al punto $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ a lo largo de la curva Γ.

Pregunta 4. Se considera la región A del primer cuadrante limitada por las tres curvas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ y $x = \sqrt{3}\, y$. Sea Γ la frontera de A recorrida en el sentido de las agujas del reloj. Se pide:

1. Calcular la coordenada x del centro de gravedad de A, supuesto éste homogéneo.

2. Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (-xy, x^2)$ a lo largo de la curva Γ.

Pregunta 5. Se considera el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

y el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\},$$

donde a, b y r son números reales positivos.

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, marcando con un aspa la opción que proceda.

1. Si $a^2 + b^2 < r^2$, entonces $\boldsymbol{F}$ admite un potencial escalar en Ω. V ☐ F ☐

2. Si $a^2 + b^2 > r^2$, entonces la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cualquier curva de Jordan contenida en Ω es nula. V ☐ F ☐

3. Se consideran todas las curvas C^1 a trozos contenidas en el semiplano $y > 0$ con origen en el punto $(-1, 2)$ y extremo en el punto $(2, 1)$. Entonces, la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cualquiera de ellas vale lo mismo. V ☐ F ☐

4. Si $b > r$ entonces $U(x, y) = -\arctan(x/y)$ es un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$ en Ω. V ☐ F ☐

Respuestas.

1. $255\pi/2$.

2.
$$\iiint_\Omega f = \int_0^1 \left[\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)\; dy \right) dx \right] dz$$

$$g^{-1}(\Omega) = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,/\quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\,, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos\varphi} \right\}$$

3. 1. $23/15$; 2. $1/12$.

4. 1. $6/\pi$; 2. $-27/2$.

5. F V V V

EC. Segunda prueba común

Problema 1

Se considera el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{4M^2}\right)^{3/2}} \qquad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

donde M denota el mínimo dígito no nulo entre las unidades, decenas y centenas de su número de matrícula. Se pide:

1. Estudiar si $\boldsymbol{F}$ es un campo solenoidal en su dominio de definición.

2. Se considera la superficie cerrada

   $$S: x^2+y^2+\frac{z^2}{4M^2} = 1.$$

   Sea S_1 la porción de S con $z \geq M$, y sea S_2 la porción de S con $z \leq M$. Hallar el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de las superficies S, S_1 y S_2, todas ellas orientadas según la normal saliente a S.

3. Si Σ es una superficie contenida en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, regular y orientable, que tiene la misma curva borde que S_1 ¿cuáles son los posibles valores que puede tomar el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ?

4. ¿Admite $\boldsymbol{F}$ un potencial vector de clase 1 en un entorno de la superficie S del apartado 2? Razónese la respuesta, sin efectuar cálculos.

Respuesta:

1. Se comprueba fácilmente que la divergencia es nula en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:

   $$div\boldsymbol{F} = \frac{div\,(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2/\left(4M^2\right)\right)^{3/2}} + \nabla\left(\left(\left(x^2+y^2+z^2/\left(4M^2\right)\right)\right)^{-3/2}\right)\cdot(x,y,z) =$$
   $$= \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2/\left(4M^2\right)\right)^{3/2}} + \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{2\left(x,y,z/\left(4M^2\right)\right)}{\left(x^2+y^2+z^2/\left(4M^2\right)\right)^{5/2}}\cdot(x,y,z) = 0$$

2. Este ejercicio se puede resolver de diferentes formas. Por ejemplo, si observamos que en los puntos de S el campo $\boldsymbol{F}$ toma el valor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$**,** podemos aplicar el teorema de Gauss en el elipsoide E limitado por la superficie cerrada S, llegando a

   $$\iint_S \boldsymbol{F}d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \boldsymbol{r}d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_E 3dxdydz = 3Vol\,(E) = 4\pi\,(2M) = 8M\pi.$$

Para hallar el flujo a través de S_1 y de S_2, calculamos el flujo a través de una de estas dos superficies y luego utilizaremos que

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{S_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = 8M\pi$$

ya que ambas están orientadas según la normal saliente a S.

Parametricemos la superficie S_1 (se puede hacer de muchas formas: utilizando coordenadas elipsoidales, o como gráfica de una función, o como superficie de revolución); aquí utilizaremos coordenadas elipsoidales, según las cuales los puntos de la superficie S_1 se parametrizan como:

$$(x, y, z) = \Phi(t, v) = (\cos v \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} t, 2M \cos t), \quad (t, v) \in [0, \pi/3] \times [0, 2\pi]$$

donde hemos utilizado que $z = 2M \cos t \geq M$ con lo cual $\cos t \geq 1/2$ y ello implica que $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

El vector normal asociado a esta parametrización es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 2M \operatorname{sen} t \left(\cos v \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{4M^2} \right)$$

que tiene la orientación saliente al elipsoide. El flujo del campo $\boldsymbol{F}$ se simplifica a los siguientes cálculos:

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{S_1} \boldsymbol{r} d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2M \operatorname{sen} t \; dt dv = 4M\pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) = 2M\pi.$$

Obsérvese que esta parametrización podría extenderse a la superficie completa S, tomando $v \in [0, \pi]$. Eso nos llevaría también a afirmar que

$$\iint_{S} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2M \operatorname{sen} t \; dt dv = 4M\pi (1 - \cos \pi) = 8M\pi.$$

Por último, el flujo a través de la otra superficie S_2 es

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{S} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} - \iint_{S_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = 8M\pi - 2M\pi = 6M\pi.$$

MÉTODO ALTERNATIVO: puede expresarse S_1 como gráfica de la función $z = z(x, y) = 2M\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, y la condición $z \geq M$ implica que $2M\sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq M$ de lo cual se deduce que el dominio de los parámetros es $D : x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}/2$. Habría que calcular el vector normal asociado a dicha parametrización, que es

$$\boldsymbol{N}(x, y) = \left(\frac{2Mx}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{2My}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

y realizar los cálculos que llevan a

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \iint_D (x, y, z(x,y)) \cdot \boldsymbol{N}(x,y) dxdy = \iint_D \frac{2M}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy$$
$$= (2M)(2\pi) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 4M\pi \left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2M\pi.$$

3. Obviamente, la curva borde de S_1 es la misma curva borde de S_2, y es una circunferencia C de ecuaciones $x^2 + y^2 = 3/4, \ \ z = M$. Si la superficie genérica Σ tiene por borde esta misma curva C, delimita con S_1 un sólido Ω_1 y con S_2 otro sólido Ω_2. Hay 2 posibilidades:

   - Si Ω_1 -el sólido delimitado por S_1 y Σ- no contiene el punto $(0,0,0)$, entonces podemos aplicar el teorema de Gauss a Ω_1 (en el que $\boldsymbol{F}$ es solenoidal y de clase 1). Ello garantiza que el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ es, salvo signo, igual al flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S_1, es decir, $\pm 2M\pi$.
   - En cambio, si el punto $(0,0,0)$ está contenido en Ω_1, entonces $(0,0,0)$ no estará contenido en Ω_2 (el sólido delimitado entre Σ y S_2). Por tanto, podemos aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en Ω_2 (donde $\boldsymbol{F}$ es solenoidal y de clase 1) y razonando igual que en el caso anterior, podemos asegurar que el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ es, salvo signo, igual al flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S_2, es decir, es $\pm 6M\pi$.

4. Si existiera ese potencial vector $\boldsymbol{G}$ de clase 1 en $S = S_1 \cup S_2$, como S_1, S_2 tienen la misma curva borde C, entonces podría aplicarse el teorema de Stokes para afirmar que

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{S_1} rot\boldsymbol{G} d\boldsymbol{\sigma} = \int_C \boldsymbol{G} = \pm \iint_{S_2} rot\boldsymbol{G} d\boldsymbol{\sigma} = \pm \iint_{S_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma}$$

   (los signos dependen de las orientaciones de las superficies) pero por otro lado se sabe que los flujos a través de S_1 y S_2 no son iguales ni opuestos (uno vale $2M\pi$ y otro $6M\pi$); esta contradicción indica que no puede existir dicho campo $\boldsymbol{G}$.

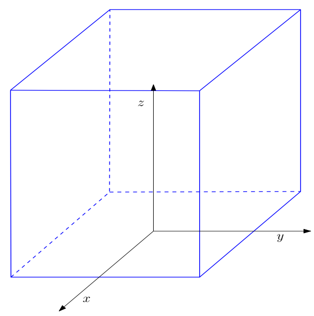
   Otro razonamiento es el siguiente: Si existiera $\boldsymbol{G}$ de clase C^1 tal que $rot\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ en un entorno de la superficie S, entonces por el teorema de Stokes se tendría que

$$8M\pi = \iint_S \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S rot\boldsymbol{G} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial S} \boldsymbol{G} = 0$$

   y esta última integral curvilínea sobre el borde de S es nula, puesto que S es una superficie cerrada. Llegaríamos a una contradicción; por tanto, es imposible que exista dicho potencial vector $\boldsymbol{G}$.

Problema 2

Se considera el prisma recto de altura H representado en la figura, cuyas bases son cuadrados de lado L y tal que el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del cuadrado de su base inferior. Sea el campo vectorial dado por:



$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x(y+z)\,,\, y(x+z)\,,\, z(x+y))\;.$$

Se pide:

1. El flujo total del campo $\boldsymbol{F}$ saliente del prisma.

2. El flujo del campo $\boldsymbol{F}$ saliente por cada una de las caras del prisma excluidas sus bases.

3. La circulación del campo $\boldsymbol{F}$ alrededor de cada una de las curvas cerradas simples formadas por la frontera de cada una de las caras (excluidas sus bases) orientadas por la normales salientes del prisma.

Respuesta:

1 Aplicando Gauss

$$\iint_S \boldsymbol{F}\, d\sigma = \iiint_V div\boldsymbol{F}\, dV = \iiint_v 2\,(x+y+z)\, dv = 2\,(x_g + y_g + z_g)\, V = 2z_g V = L^2 H^2$$

2. Cara en el plano $x = L/2$

$$F_1 = \frac{1}{2}L\,(y+z) \Rightarrow \Phi_1 = \frac{1}{2}L\int\int_S (y+z)\,dydz = \frac{1}{2}Lz_gA = \frac{1}{2}L\frac{H}{2}HL = \frac{1}{4}L^2H^2$$

Cara en el plano $x = -L/2$

$$F_1 = -\frac{1}{2}L\,(y+z) \Rightarrow \Phi_2 = \frac{1}{2}L\iint_S (y+z)\,dydz = \frac{1}{4}L^2H^2$$

Cara en el plano $y = L/2$

$$F_2 = \frac{1}{2}L\,(x+z) \Rightarrow \Phi_3 = \frac{1}{2}L\iint_S (x+z)\,dxdz = \frac{1}{2}Lz_gA = \frac{1}{2}L\frac{H}{2}HL = \frac{1}{4}L^2H^2$$

Cara en el plano $y = -L/2$

$$F_2 = -\frac{1}{2}L\,(x+z) \Rightarrow \Phi_4 = \frac{1}{2}L\iint_S (x+z)\,dxdz = \frac{1}{4}L^2H^2$$

3. Cara en el plano $x = L/2$

$$\boldsymbol{F} = \left(....,y(z+\frac{L}{2}),z\left(y+\frac{L}{2}\right)\right)$$

Aplicando Green

$$\int_{\partial C_1}\boldsymbol{F}dl = \iint_{C_1}(D_2F_3 - D_3F_2)\,dydz = \iint_{C_1}(z-y)\,dydz = z_gA = \frac{H}{2}HL = \frac{1}{2}H^2L$$

Cara en el plano $x = -L/2$

$$\boldsymbol{F} = \left(....,y(z-\frac{L}{2}),z\left(y-\frac{L}{2}\right)\right)$$

Aplicando Green

$$\int_{\partial C_2}\boldsymbol{F}dl = \iint_{C_2}(D_2F_3 - D_3F_2)\,dydz = \iint_{C_1}(z-y)\,dydz = z_gA = \frac{H}{2}HL = \frac{1}{2}H^2L$$

Cara en el plano $y = L/2$

$$\boldsymbol{F} = \left(x(z+\frac{L}{2}),.....,z\left(x+\frac{L}{2}\right)\right)$$

Aplicando Green

$$\int_{\partial C_3}\boldsymbol{F}dl = \iint_{C_3}(D_3F_1 - D_1F_3)\,dxdz = \iint_{C_3}(x-z)\,dxdz = -z_gA = -\frac{H}{2}HL = -\frac{1}{2}H^2L$$

Cara en el plano $y = -L/2$

$$\boldsymbol{F} = \left(x(z - \frac{L}{2}), ..., z\left(x - \frac{L}{2} \right) \right)$$

Aplicando Green

$$\int_{\partial C_4} \boldsymbol{F} dl = \iint_{C_4} (D_3F_1 - D_1F_3)\, dxdz = \iint_{C_4} (x - z)\, dydz = -z_g A = -\frac{H}{2} HL = -\frac{1}{2} H^2 L$$

Convocatoria ordinaria

Problema 1

Sea la superficie Σ definida por

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 2 \\ z \geq 1 \end{array} \right.$$

1. Se considera el sólido K limitado por Σ y el plano $z = 1$. Calcular la masa de K sabiendo que la densidad en cada punto de K es proporcional a la distancia del punto al plano XY, siendo κ la constante de proporcionalidad.

2. Calcular el flujo del campo

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = \frac{(zx, zy, z^2)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2}}$$

sobre la superficie Σ orientada de forma que la normal tiene su tercera componente positiva.

3. Calcular los valores reales del parámetro α para los que el campo

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{(yz, xz, -8xy)}{(4x^2 + 4y^2 + z^2)^{\alpha}}$$

es solenoidal en su dominio de definición.

4. Sea C la superficie cónica formada por los segmentos que empiezan en el punto $(1, 1, 7)$ y terminan en los puntos de la curva Γ

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Se supone que C está orientada de forma que la normal es saliente al sólido K del apartado (1). Se pide calcular el flujo del campo

$$\boldsymbol{H}(x, y, z) = \frac{(yz, xz, -8xy)}{(4x^2 + 4y^2 + z^2)^2}$$

sobre C.

Respuesta:

1. Se trata de calcular la integral

$$M = \iiint_K \rho dxdydz$$

donde la densidad es $\rho(x, y, z) = \kappa |z|$. El sólido K está limitado por un paraboloide invertido y un plano horizontal. Como K está situado en el semiespacio $z > 0$ tenemos que $|z| = z$ y por tanto

$$M = \kappa \iiint_K zdxdydz$$

Hay varias estrategias razonables para calcular esta integral. Una de ellas es fijar z, es decir, cortar por planos $z = cte$, e integrar en (x, y). Al cortar K por un plano a altura z se obtiene un círculo, que denotamos M_z, de centro el origen y radio

$$r_z := \frac{1}{2}\sqrt{2 - z^2}.$$

La altura mínima y máxima a las que dichos planos intersecan a K son $z = 1$ y $z = \sqrt{2}$, por lo que

$$M = \kappa \iiint_K zdxdydz = \kappa \int_1^{\sqrt{2}} \left(\iint_{M_z} zdxdy \right) dz = \kappa \int_1^{\sqrt{2}} z \left(\iint_{M_z} dxdy \right) dz =$$
$$= \kappa \int_1^{\sqrt{2}} z \,\text{Área}(M_z)dz = \kappa \int_1^{\sqrt{2}} z\pi\frac{1}{4}\left(2 - z^2\right) dz = \frac{\kappa}{4}\int_1^{\sqrt{2}} \left(2z - z^3\right) dz = \cdots = \kappa\frac{\pi}{16}$$

2. La superficie Σ es de clase 1 y el campo $\boldsymbol{V}$ es continuo sobre la misma, con lo que el flujo pedido

$$\phi := \int_\Sigma \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_\Sigma \frac{(zx, zy, z^2)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2}} \cdot d\sigma$$

está definido. La expresión del campo es complicada pero observamos que, sobre la superficie Σ, se cumple que $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ con lo que la expresión del campo se puede simplificar. Así tenemos

$$\phi := \int_\Sigma \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\Sigma \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Ahora podemos calcular el flujo del campo (zx, zy, z^2) aplicando la definición o bien aplicar adecuadamente el teorema de Gauss (para lo cual, obviamente, habrá que cerrar la superficie Σ). Puesto que $\operatorname{div}(zx, zy, z^2) = 4z$, vemos que la integral triple que se obtiene al aplicar el teorema podría estar relacionada con la integral calculada en el primer apartado. Seguiremos pues este camino.

Consideremos el compacto K. Como (zx, zy, z^2) es de clase 1 en un abierto que contiene a K (de hecho es de clase 1 en todo $\mathbb{R}^3$) y la frontera de K está formada

por un número finito de superficies de clase 1, tenemos que se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Gauss a dicho campo en K y tenemos

$$\iiint_K \operatorname{div}\left(zx, zy, z^2\right) dxdydz = \int_{\partial K} \left(zx, zy, z^2\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Sigma} \left(zx, zy, z^2\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_{\Pi} \left(zx, zy, z^2\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

donde Π denota la porción del plano $z = 1$ que cierra la superficie Σ orientado por el vector $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$, y que es un círculo de radio $1/2$. Por lo tanto

$$\int_{\Sigma} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_K \operatorname{div}\left(zx, zy, z^2\right) dxdydz + \int_{\Pi} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} =$$

$$= 4 \iiint_K zdxdydz + \int_{\Pi} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{apdo. 1}}}{=} 4\frac{\pi}{16} + \int_{\Pi} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Para calcular el flujo sobre Π, usamos que el vector normal unitario es $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$

$$\int_{\Pi} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Pi} z^2 d\sigma \underset{\substack{\uparrow \\ z=1 \text{ sobre } \Pi}}{=} \int_{\Pi} d\sigma = \text{Área}(\Pi) = \frac{\pi}{4}$$

En definitiva

$$\phi := \int_{\Sigma} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Sigma} \left(zx, zy, z^2\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. El dominio de definición de $\boldsymbol{F}$ es $M := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si $\alpha > 0$ y $M := \mathbb{R}^3$ en el caso $\alpha \leq 0$ y en dicho dominio el campo es de clase. Utilizando la expresión para la divergencia del producto de un campo escalar y un campo vectorial tenemos

$$\operatorname{div} \frac{(yz, xz, -8xy)}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha}} =$$

$$= \operatorname{grad} \frac{1}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha}} \cdot (yz, xz, -8xy) + \frac{1}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha}} \operatorname{div}(yz, xz, -8xy) =$$

$$= \frac{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha} \operatorname{grad} 1 - \operatorname{grad}\left(\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha}\right)}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{2\alpha}} + \frac{1}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha}} \operatorname{div}(yz, xz, -8xy) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{div}(yz, xz, -8xy) = 0}}{=} \frac{0 - \alpha\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{\alpha - 1}}{\left(4x^2 + 4y^2 + z^2\right)^{2\alpha}} (8x, 8y, 2z) \cdot (yz, xz, -8xy) \underset{\substack{\uparrow \\ (8x, 8y, 2z)\cdot(yz, xz, -8xy) = 0}}{=} 0$$

con lo que $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en su dominio de definición para todo valor real de α.

4. El campo $\boldsymbol{H}$ no es más que el campo $\boldsymbol{F}$ en el caso $\alpha = 2$, por lo que es de clase 1 y solenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Por lo tanto, el flujo de $\boldsymbol{H}$ a través del cono C coincide con el flujo de $\boldsymbol{H}$ a través de cualquier superficie cuyo borde orientado sea el mismo que el de Σ y que se obtenga deformando C de manera continua sin salirnos del conjunto M en el que el campo es de clase 1. Tenemos así que

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Otra forma de deducir lo anterior sin saberse el resultado de memoria es aplicar el teorema de Gauss al compacto limitado por las superficies C y Σ y usar que $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$.

En definitiva

$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_\Sigma \frac{(yz, xz, -8xy)}{(4x^2+4y^2+z^2)^2}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \underset{4x^2+4y^2+z^2=2 \text{ sobre } \Sigma}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4}\int_\Sigma (yz, xz, -8xy)\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

La razón para "sustituir" C por Σ y no por la superficie Π del apartado 2 es que, como hemos visto, la expresión de $\boldsymbol{H}$ se simplifica mucho sobre Σ pero no sobre Π.

Ahora el flujo de $(yz, xz, -8xy)$ sobre Σ se puede calcular aplicando la definición o mejor, teniendo en cuenta que $(yz, xz, -8xy)$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3$, podemos aplicar el mismo argumento anterior para sustituir el flujo de $(yz, xz, -8xy)$ sobre Σ por el flujo de dicho campo sobre Π. Así tenemos

$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4}\int_\Sigma (yz, xz, -8xy)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4}\int_\Pi (yz, xz, -8xy)\cdot d\boldsymbol{\sigma} \underset{\boldsymbol{n}=(0,0,1)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4}\int_\Pi -8xy\, d\sigma = 0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que el campo xy es impar en x y que la superficie Π es simétrica respecto del plano $x = 0$.

Problema 2

Sea Γ el arco de curva parametrizado

$$\begin{aligned} \gamma : [0,\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (1+\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t,\ 2\operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

y sea S la esfera $\|\boldsymbol{r}\| = 2$ orientada según el vector normal saliente. Se considera asimismo el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \log(\|\boldsymbol{r}\|)(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}),$$

donde $\boldsymbol{a}$ es un vector fijo, no nulo.

1. Calcúlese la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ. ¿Es conservativo $\boldsymbol{F}$ en su dominio de definición?

2. Calcúlese el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S. ¿Puede calcularse el flujo aplicando adecuadamente el teorema de Gauss?

3. Sea Σ una porción cualquiera de S. Exprésese el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ en función del área y el centroide de Σ.

Respuesta:

1. Hagamos en primer lugar un análisis de la curva y del campo que se desea integrar. La curva es cerrada ya que

   $$\gamma(0) = (1+\cos 0,\ \operatorname{sen} 0,\ 2\operatorname{sen} 0) = (2,0,0) = (1+\cos 2\pi,\ \operatorname{sen} 2\pi,\ 2\operatorname{sen}\pi) = \gamma(\pi).$$

   Además, si calculamos la norma de $\gamma(t)$ obtenemos:

   $$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 &= (1+\cos 2t)^2 + \operatorname{sen}^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 t = 2(1+\cos 2t) + 4\operatorname{sen}^2 t = 4, \end{aligned}$$

   lo que nos muestra que la curva está sobre S. Por otro lado, el campo $\boldsymbol{F}$ puede descomponerse en suma de dos campos,

   $$F(\boldsymbol{r}) = \log(\|\boldsymbol{r}\|)\ \boldsymbol{r} + \log(\|\boldsymbol{r}\|)\ \boldsymbol{a};$$

   el primero de ellos: $\log(\|\boldsymbol{r}\|)\ \boldsymbol{r}$ es un campo central y por consiguiente conservativo en su dominio de definición, que es $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, mientras que el segundo restringido a la esfera S es constante e igual a $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) := \log 2\ \boldsymbol{a}$. Sabemos que tanto la circulación de un campo conservativo como la circulación de un campo constante (caso particular de conservativo) es nula a lo largo de una curva cerrada, así pues concluimos que

   $$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

   Alternativamente, dado que nos dan la curva parametrizada, sabemos que la circulación a lo largo de Γ viene definida por:

   $$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} := \int_0^\pi \boldsymbol{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt,$$

   calculemos la función integrando,

   $$\begin{aligned} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) &= \log 2\ (\gamma(t)+\boldsymbol{a})\cdot\gamma'(t) \\ &= \log 2\ [(1+\cos 2t)(-2\operatorname{sen} 2t) + 2\operatorname{sen} 2t\cos 2t + 2\operatorname{sen} t\cos t + \boldsymbol{a}\cdot\gamma'(t)] \\ &= \log 2\ [-\operatorname{sen} 2t + \boldsymbol{a}\cdot\gamma'(t)] \end{aligned}$$

   e integremos:

   $$\begin{aligned} \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \log 2\left[\int_0^\pi -\operatorname{sen} 2t\ dt + \int_0^\pi \boldsymbol{a}\cdot\gamma'(t)\ dt\right] \\ &= \log 2\left[\left.\frac{\cos 2t}{2}\right|_0^\pi + \boldsymbol{a}\cdot\gamma(t)|_0^\pi\right] = [0 + \boldsymbol{a}\cdot(\gamma(\pi)-\gamma(0))] = 0. \end{aligned}$$

Para terminar, nos preguntan si $\boldsymbol{F}$ es conservativo. Su dominio de definición es $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$; este conjunto es simplemente conexo y el campo es C^∞, por tanto la condición necesaria y suficiente para que el campo sea conservativo es que sea irrotacional, calculemos entonces el rotacional de $\boldsymbol{F}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\,[\,\log(\|\boldsymbol{r}\|)\,(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})] &= \operatorname{grad}\log(\|\boldsymbol{r}\|)\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})+\log(\|\boldsymbol{r}\|)\operatorname{rot}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0} \end{aligned}$$

Así pues $\boldsymbol{F}$ **no** es conservativo en su dominio de definición.

2. Para calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S tenemos presente que el vector normal saliente unitario es $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/2$, y que la norma de $\boldsymbol{r}$ sobre la esfera es constante e igual a 2, por tanto:

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\;d\sigma = \log 2\int_S\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{2}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)d\sigma$$

Calculamos cada sumando por separado,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{2}d\sigma = 2\int_S d\sigma = 2A(S) = 32\pi;$$

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{2}d\sigma = \frac{1}{2}\int_S(a_1x+a_2y+a_3z)d\sigma = 0.$$

Podemos razonar que esta última integral es nula, por ejemplo, relacionándola con una combinación lineal de las componentes del centroide de S que es el vector nulo. Concluimos que el flujo pedido es:

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 32\log 2\;\pi.$$

El teorema de Gauss no puede aplicarse directamente ya que el campo $\boldsymbol{F}$ no está definido en el origen y no puede extenderse a ese punto con continuidad; para poder aplicar el teorema el campo tiene que estar definido en el interior de la esfera, pero esta contiene el origen. Sin embargo, la restricción de $\boldsymbol{F}$ a la superficie esférica S coincide con el campo $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \log 2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})$, que es C^∞ en todo $\mathbb{R}^3$, luego a este campo **sí** puede aplicársele el teorema de Gauss; además, $\boldsymbol{H}$ tiene divergencia constante e igual a $3\log 2$, entonces:

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\mathrm{int}(S)}\operatorname{div}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\;d\boldsymbol{r} = 3\log 2\;V(\mathrm{int}(S)) = 32\log 2\;\pi.$$

3. Sea Σ una porción cualquiera de S orientada por $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/2$, el flujo de $\boldsymbol{F}$ será:

$$\int_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\;d\sigma = \frac{\log 2}{2}\int_\Sigma(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})d\sigma = \frac{\log 2}{2}\left(4A(\Sigma)+A(\Sigma)\;\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_\Sigma\right).$$

Donde $\boldsymbol{c}_\Sigma$ denota el centroide de Σ, definido por:

$$\boldsymbol{c}_\Sigma = \frac{1}{A(\Sigma)} \left(\int_\Sigma x \, d\sigma, \ \int_\Sigma y \, d\sigma, \int_\Sigma z \, d\sigma \right).$$

Problema 3

Este problema consta de 4 preguntas sobre cuestiones numéricas.

Pregunta 1. Sea Ω el sólido de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \le x, \ 0 \le y, \ 2 \le z \le 3, \ (x^2 + y^2)^{3/2} \le 4yz\}.$$

1. Expresar Ω en coordenadas cilíndricas

   $\le z \le \quad , \quad \le \theta \le \quad , \quad \le \rho \le$

2. En cada punto de Ω la densidad es igual a la distancia al plano de ecuación $z = 2$. Calcular la masa de Ω.

   $M_\Omega =$

Pregunta 2. Sea el recinto $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1/2, \ 0 \le y \le 1, \ \ 4x^2 + y^2 \ge 1\}$ y sea Γ su curva frontera, orientada positivamente. Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{G}(x, y) = \left(0 \, , \, \frac{y}{1 + 4x^2 + y^2} \right).$$

1. Encontrar una relación entre $I = \displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$ y la integral $J := \displaystyle\iint_B \frac{xy}{(1 + 4x^2 + y^2)^2} dx dy$.

2. Calcular la integral $I = \displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$

   $I =$

Pregunta 3. Calcular el área de la región acotada de $\mathbb{R}^2$ contenida en el primer cuadrante delimitada por las curvas:

$$xy = 4,\ xy = 9,\ y = 3x,\ y = 4x.$$

Pregunta 4. Calcúlese la integral curvilínea del campo $\boldsymbol{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(x, y)$ a lo largo de las siguientes curvas:

1. La circunferencia de centro $(0, 2)$ y radio 3 recorrida en sentido positivo.

2. El arco de la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 - 9$ recorrido desde $(-1, 0)$ hasta $(5, 0)$.

Respuestas.

1. 1. $2 \leq z \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{z \operatorname{sen} \theta}$
   2. $M_\Omega = \displaystyle\iiint_\Omega |z - 2| dxdydz = \frac{8}{3}.$

2. $I = -8J = \dfrac{1}{2}(\log 3 - \log 2) - \dfrac{1}{4}$

3. $A = \dfrac{5}{2} \log\left(\dfrac{4}{3}\right)$

4. 1. 0 2. $\dfrac{\log 25}{2} = \log 5\,.$

Convocatoria extraordinaria

Cuestiones

Pregunta 1. Sea f una función continua en $\mathbb{R}^2$, escribir los límites de integración:

$$\int_0^2 \left(\int_0^{3\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x,y)\, dx \right) dy =$$

$$\int \quad \left(\int \qquad\qquad f(x,y)\, dy \right) dx$$

Pregunta 2. Dado $a > 0$, sea Γ el arco de curva de ecuación polar $\rho = a(1 + \cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq \theta_0$. Determinar el valor de θ_0 para el cual la longitud de Γ es $4a$.

Pregunta 3. Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \log(\|\boldsymbol{r}\|)\boldsymbol{r}$, donde D es el dominio de definición. Entonces:

D es estrellado	V ☐	F ☐
$\boldsymbol{F}$ es conservativo en D	V ☐	F ☐
$\boldsymbol{F}$ es solenoidal en D	V ☐	F ☐
D es simplemente conexo	V ☐	F ☐
$\boldsymbol{F}$ es irrotacional en D	V ☐	F ☐
$\boldsymbol{F}$ admite potencial vector en D	V ☐	F ☐

Pregunta 4. Parametrizar la superficie cónica de vértice $(1, 1, 0)$ y curva borde tiene por ecuaciones $x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 1$.

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \\ y(u,v) &= \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad (u,v) \in \\ z(u,v) &= \end{aligned}$$

Pregunta 5. Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}$, definido para $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. Sea la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = 3$, y sean S_1, S_2 las porciones de S con $z \geq 1$, y $z \leq 1$, respectivamente, todas ellas orientadas según la normal saliente a S. Denotemos I, I_1, I_2 los flujos de $\boldsymbol{F}$ a través de S, S_1, S_2.

Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $I = I_1 + I_2$ V ☐ F ☐
2. $I = I_2$ V ☐ F ☐
3. $I = 0$ V ☐ F ☐
4. Como $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y las superficies S_1, S_2 tienen la misma curva borde, entonces $|I_1| = |I_2|$. V ☐ F ☐

Soluciones:

1. $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^{2\sqrt{1-(x^2/9)}} f(x,y)\, dy \right) dx$

2. $\theta_0 = \pi$

3. F V F V V F

4. $$\begin{aligned} x(u,v) &= 1 + u(\cos v - 1) \\ y(u,v) &= 1 + u(\operatorname{sen} v - 1) \qquad , \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi] \\ z(u,v) &= u \end{aligned}$$

5. V F F F

Problema 1

Considere el paraboloide elíptico de ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - z\,,$$

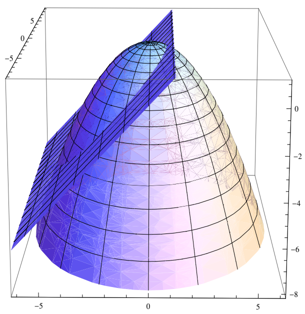
y sean

- Ω el sólido acotado de $\mathbb{R}^3$ limitado por el paraboloide y el plano $z = x$.
- Σ la porción del paraboloide que forma parte de la frontera de Ω,
- Γ la curva definida por la proyección sobre el plano $z = 0$ de la intersección del paraboloide con el plano $z = x$.

1. Calcule el área limitada por la curva Γ.
2. Sabiendo que el volumen de Ω es 12π, calcule la primera componente de su centroide.
3. Calcule la divergencia del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (z - x)\,(x\,,\, y\,,\, -z)$ especificando el mayor conjunto en el que está definida.
4. Calcule razonadamente el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ definido en el apartado anterior a través de la cara de Σ cuyo vector normal tiene tercera componente no negativa.

Respuesta:

En la figura se representa el paraboloide y el plano $z = x$



1. La proyección sobre el plano $z = 0$ de la intersección del paraboloide con el plano $z = x$ es la curva de ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - x\,,$$

situada en el plano $z = 0$. Completando cuadrados resulta

$$\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1\,. \tag{9}$$

Es decir, Γ es la elipse de centro el punto $(-2, 0)$ y semiejes $2\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$. Por tanto, el área del recinto plano limitado por Γ es

$$\text{Área} \;=\; (2\sqrt{2})\,(3\sqrt{2})\pi = 12\pi\,.$$

NOTA: Si representamos por E el recinto plano limitado por Γ, el mismo resultado se obtiene calculando la integral doble:

$$\text{Área} \;=\; \iint_E dxdy\,.$$

2. Como el volumen de Ω es 12π, la primera componente de su centroide es, por definición:

$$X_c(\Omega) \;=\; \frac{1}{12\pi}\iiint_\Omega x\,dxdydz\,,$$

donde Ω viene dado por las ecuaciones

$$\Omega \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x \le z \le 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\;,\;(x, y) \in E\right\}$$

y se ha representado por E el recinto situada en plano $z = 0$ del apartado anterior; es decir:

$$E \;=\; \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, \frac{(x+2)^2}{8} + \frac{y^2}{18} \le 1\right\}\,.$$

Puesto que Ω es proyectable sobre elplano XY (o simple con respecto al eje Z) una de las posibles formas de aplicar el Teorema de Fubini a la integral tripe que hay que calcular es la siguiente:

$$\begin{aligned} X_c(\Omega) \;=\; \frac{1}{12\pi}\iiint_\Omega x\,dxdydz \;&=\; \frac{1}{12\pi}\iint_E dxdy \int_x^{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}} x\,dz \\ &=\; \frac{1}{12\pi}\iint_E x\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - x\right)\,dxdy\,. \end{aligned}$$

Para calcular esta última integral doble, hacemos un cambio a las coordenadas elípticas desplazadas:

$$x \;=\; -2 \;+\; 2\sqrt{2}\,\rho\,\cos\theta\,, \quad y \;=\; 3\,\sqrt{2}\,\rho\,\operatorname{sen}\theta\,,$$

de forma que el jacobiano de la transformación es

$$J = (2\sqrt{2})(3\sqrt{2})\rho \;=\; 12\,\rho\,.$$

En estas coordenadas, el recinto E se transforma en el rectángulo

$$E^* = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho \in [0,1]\,,\, \theta \in [0, 2\pi]\right\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} X_c(\Omega) &= \frac{1}{12\pi} \iint_E x \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - x\right) dxdy = -\frac{4}{\pi} \iint_{E^*} \left(\rho^2 - 1\right) \left(\sqrt{2}\rho\cos(t) - 1\right) \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^1 \rho\, \left(\rho^2 - 1\right)\, d\rho \left(\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\rho\cos(t) - 1\right) d\theta\right) \;=\; 8 \int_0^1 \rho\, \left(\rho^2 - 1\right)\, d\rho \;=\; -2\,. \end{aligned}$$

3. Por definición, la divergencia del campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) \;=\; (z - x)\,(x\,,\, y\,,\, -z)$ es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial(z-x)x}{\partial x} + \frac{\partial(z-x)y}{\partial y} - \frac{\partial(z-x)z}{\partial z} \;=\; -\,2\,x\,,$$

que está definida en $\mathbb{R}^3$.

4. Para calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la cara de Σ que se indica (que representaremos por Σ^+) podemos aplicar el Teorema de Gauss al conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Al hacerlo resulta:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dxdydz \;=\; -2 \iiint_\Omega x\, dxdydz \;=\; -2\,(12\pi)\, X_c(\Omega) \;=\; 48\pi\,,$$

donde $\partial\Omega^+$ representa la frontera de Ω orientada según su normal exterior (o saliente) que es la unión de dos superficies. Una es Σ^+ y la otra es la cara adecuada de la superficie plana contenida en el plano $z = x$ y limitada por la elipse dada por la ecuación (9) descrita en el primer apartado. La orientación de esta cara (que representamos por E^-) es la que posee un vector normal unitario con tercera componente negativa.

Se tiene entonces:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \;+\; \iint_{E^-} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}\,.$$

Ahora bien, como en E^- es $z = x$, el campo $\boldsymbol{F}$ se anula sobre esta superficie y, por tanto:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; 48\pi\,,$$

que es el valor del flujo que se pide calcular.

NOTA: El flujo también se puede calcular parametrizando adecuadamente la superficie Σ^+ y utilizando la definición.

Problema 2

Se considera el campo vectorial:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{4x^2+2y^2+z^2}\,(3x^2y,\ x^3+2yz,\ y^2+2z)$$

la superficie

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} 4x^2+2y^2+z^2=4 \\ y \geq 1 \end{array} \right.$$

orientada por el vector normal exterior al elipsoide y la curva:

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ y \geq 1,\ z=0 \end{array} \right.$$

recorrida en el sentido creciente de x.

Se pide:

1. Estudiar si el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo.
2. Calcular el flujo del rotacional de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ.
3. Hallar la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ.
4. Razonar sobre la validez de la siguiente afirmación:

   La circulación de $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de cualquier curva cerrada sobre el elipsoide de ecuación* $4x^2+2y^2+z^2=1$ *es nula.*

Respuesta:

1. El dominio de definición de $\boldsymbol{F}$ es el espacio perforado en el origen, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ que, como bien sabemos, es simplemente conexo; además, el campo en su dominio es C^∞ por lo tanto una condición necesaria y suficiente para que sea conservativo es que sea irrotacional. Para calcular su rotacional observamos en primer lugar que $\boldsymbol{F}$ puede expresarse como $\boldsymbol{F} = g\,\boldsymbol{G}$ donde g es el campo escalar

   $$g(x,y,z) = \frac{1}{4x^2+2y^2+z^2}$$

   y $\boldsymbol{G}$ el campo vectorial

   $$\boldsymbol{G}(x,y,z) = (3x^2y,\ x^3+2yz,\ y^2+2z)$$

y podemos aplicar la fórmula:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(g\ \boldsymbol{G}) = \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{G} + g \operatorname{rot}\boldsymbol{G}.$$

Ahora calculamos el gradiente de g:

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \frac{-2}{(4x^2+2y^2+z^2)^2}(4x,2y,z)$$

y el rotacional de $\boldsymbol{G}$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{G}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & x^3+2yz & y^2+2z \end{vmatrix} = \left(2y-2y,\ 0, 3x^2-3x^2\right) = \boldsymbol{0}.$$

Así pues el campo $\boldsymbol{G}$ es irrotacional y $\boldsymbol{F}$ no es conservativo ya que es evidente que los vectores $(4x,2y,z)$ y $(3x^2y,\ x^3+2yz,\ y^2+2z)$ no son paralelos para todo (x,y,z) no nulo; basta tomar, por ejemplo el vector $(0,1,0)$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(0,1,0) = -\frac{1}{2}(0,2,0)\times(0,0,1) = -(1,0,0) \neq \boldsymbol{0}$$

Obviamente puede responderse calculando expresamente el producto vectorial del gradiente de g por $\boldsymbol{G}$ y viendo que sale un campo que no es idénticamente nulo:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{-2}{(4x^2+2y^2+z^2)^2}(4x,2y,z)\times(3x^2y,\ x^3+2yz,\ y^2+2z)$$

$$= \frac{2}{(4x^2+2y^2+z^2)^2}(x^3z-2y^3-4yz+2yz^2,\ 4xy^2+8xz-3x^2yz,\ -4x^4-8xyz+6x^2y^2)$$

2. Este apartado puede hacerse de varias formas, si indican tres, algunas sin descender al detalle.

   a) Dado que nos piden calcular el flujo del rotacional, es natural plantearse la aplicación del teorema de Stokes. El campo $\boldsymbol{F}$ es C^∞ en su dominio y la superficie junto con su borde está contenida en dicho dominio (observemos que el origen –único punto en el que no está definido el campo– no está sobre Σ), entonces:

   $$\int_\Sigma \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

   donde

   $$\mathcal{B}(\Sigma)\ \begin{cases} 4x^2+2y^2+z^2=4 \\ y=1 \end{cases}$$

es el borde de la superficie que se supone orientado coherentemente: la orientación coherente es antihoraria en el plano ZX.

Sobre la superficie el campo escalar g es constantemente igual a 4, por tanto:

$$\int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Ahora bien, se ha visto en el apartado previo que el campo $\boldsymbol{G}$ es conservativo, y por tanto su circulación a lo largo del borde de la superficie es nulo:

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

b) Aplicando el teorema de Stokes e integrando el campo $\boldsymbol{F}$ en el borde $\mathcal{B}(\Sigma)$; una parametrización coherente con la orientación de Σ es

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t,\ 1,\ \sqrt{2} \cos t \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

La componente tangencial del campo sobre la curva es

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos t - \sqrt{2}(1 + 2\sqrt{2} \cos t) \operatorname{sen} t \right];$$

la integral entre 0 y 2π de cada sumando es nula, luego

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathcal{B}(\Sigma)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

c) Aplicando el teorema de Gauss a la superficie $\Sigma \cup E$ frontera del sólido Ω limitado por la superficie Σ y el plano $y = 1$. La superficie E consiste en el interior geométrico de la elipse borde de Σ en el plano $y = 1$,

$$E \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + z^2 \leq 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

y se orienta por el vector $-\boldsymbol{j}$. El campo $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ es C^∞ en Ω y por tanto es solenoidal, así pues

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\int_{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{j}\ d\sigma$$

Solo tenemos que integrar la segunda componente del rotacional evaluada en E, que puede parametrizarse naturalmente con los parámetros x, z; denotamos D el dominio de los parámetros, que es $4x^2 + z^2 \leq 2$ en el plano ZX:

$$\int_{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{j}\ d\sigma = -2 \iint_{D} \frac{4x + 8xz - 3x^2 z}{(4x^2 + 2y^2 + z^2)^2}\ dxdz = 0$$

La integral es nula porque los dos primeros sumandos son impares en x y D es simétrico respecto del eje OZ mientras que el tercer sumando es también nulo por la simetría de D respecto de OX y la imparidad en z.

d) Una forma muy elegante de ver que el flujo del rotacional es nulo consiste en tomar la ecuación implícita del elipsoide, $E(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$; sabemos que el vector normal es paralelo al gradiente de E, pero el gradiente de E y el de g están relacionados: $\nabla g = -g^2 \nabla E$, entonces el rotacional de $\boldsymbol{F}$ es

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla g \times G = -g^2 \nabla E \times G$$

por lo tanto (salvo eventualmente el signo), el flujo es la integral del campo escalar:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\nabla E}{\|\nabla E\|} = -g^2 \nabla E \times G \cdot \frac{\nabla E}{\|\nabla E\|}$$

Tenemos un producto mixto en el que dos vectores son proporcionales, luego el resultado es nulo.

3. La curva Γ está sobre Σ, como ya hemos apuntado anteriormente,

$$\boldsymbol{F}|_\Sigma = \frac{1}{4}\boldsymbol{G},$$

por consiguiente:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{4} \int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Para calcular esta última integral podemos proceder de varias formas:

a) Calculando un campo U potencial escalar de $\boldsymbol{G}$; es decir, resolviendo la ecuación diferencial vectorial $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{G}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y$$
$$\Rightarrow U(x, y, z) = x^3 y + C_1(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = x^3 + 2yz,$$
$$\frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = 2yz \Rightarrow C_1(y, z) = y^2 z + c_2(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = y^2 + c_2'(z) = y^2 + 2z,$$
$$c_2'(z) = 2z \Rightarrow c_2(z) = z^2 + a$$

La familia de potenciales de $\boldsymbol{G}$ (dependiente de la constante arbitraria a) es:

$$U(x,y,z)=x^3y+y^2z+z^2+a$$

Ahora calculemos los extremos inicial y final de la curva, dichos extremos están en la recta de ecuación $y=1,\ z=0$ los valores correspondientes de x son $\pm 1/\sqrt{2}$, como nos dicen que la curva se recorre en el sentido creciente de x el extremo inicial es $\boldsymbol{\alpha}=(-1/\sqrt{2},1,0)$ y el final $\boldsymbol{\beta}=(1/\sqrt{2},1,0)$, por lo que la circulación pedida vale:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{1}{4}\int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{1}{4}\left(U(\boldsymbol{\beta})-U(\boldsymbol{\alpha})\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

b) Alternativamente, como el campo $\boldsymbol{G}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$ la circulación a lo largo de una curva cualquiera depende únicamente de los extremos inicial y final, podemos sustituir Γ por cualquier curva de extremos inicial $\boldsymbol{\alpha}$ y final $\boldsymbol{\beta}$, por ejemplo el segmento parametrizado $\boldsymbol{r}(t)=(t,1,0),\ t\in[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. El vector tangente es $\boldsymbol{r}'(t)=(1,0,0)$ por lo que solamente tenemos que evaluar la primera componente de $\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\ dt=3\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}t^2dt=t^3\Big|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se concluye, como antes,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{1}{4}\int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

c) Por último, el procedimiento directo, –parametrizando la curva–:

$$\Gamma=\operatorname{Im}\gamma,\quad \gamma(t)=(\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen}t,0),\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3\pi}{4}$$

donde el rango de variación de t se determina teniendo en cuenta que $y=\sqrt{2}\operatorname{sen}t\ge 1$, la igualdad se da en los extremos del intervalo; como $\gamma(\pi/4)=\boldsymbol{\beta}$ y $\gamma(3\pi/4)=\boldsymbol{\alpha}$ la parametrización orienta la curva en el sentido opuesto al deseado. El vector tangente es $\gamma'(t)=(-\operatorname{sen}t,\sqrt{2}\cos t,0)$, y la función a integrar:

$$-\boldsymbol{G}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=3\sqrt{2}\ \cos^2 t\operatorname{sen}^2 t-\sqrt{2}\ \cos^4 t$$

Al sustituir las relaciones trigonométricas elementales:

$$\cos^2 t=1-\operatorname{sen}^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2},\quad 4\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t=\operatorname{sen}^2 2t=\frac{1-\cos 4t}{2}$$

nos queda:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s}=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(-\frac{1+\cos 2t}{2}+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\operatorname{sen}2t}{2}+\frac{\operatorname{sen}4t}{2}\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se obtiene el mismo resultado que en los metodos precedentes.

4. El campo $\boldsymbol{F}$ y el campo $\boldsymbol{G}$ coinciden sobre el elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$; por tanto su circulación a lo largo de curvas que estén sobre el elipsoide también coincide. Por otra parte, el campo $\boldsymbol{G}$ es conservativo en todo el espacio, por lo que su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Se concluye que la afirmación es **válida**.

Curso 2014/15

Convocatoria ordinaria

Problema 1 (EC/EF)

Este problema consta de dos preguntas que son completamente independientes.

Pregunta 1

Calcular el centro de masas de la porción de paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ comprendida entre los planos $z = 2$ y $z = 4$ sabiendo que sobre ella existe una densidad superficial de masa definida por $\rho(x, y, z) = (1 + 4x^2 + 64y^2)^{-1/2}$.

Pregunta 2

Se considera el campo vectorial definido por:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(1 + x^2, u(x, y, z), y^3z^2 + 1\right),$$

donde u es un campo escalar de clase uno en $\mathbb{R}^3$.

2.1. Determínese u para que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo en $\mathbb{R}^3$.

2.2. Sea Γ la curva definida por la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2/4$ con la porción del elipsoide $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ situada en el primer octante, orientada de forma que su extremo inicial es su punto de corte con el plano $y = 0$ y su extremo final es su punto de corte con el plano $x = 0$.
Para $u(x, y, z) = y^2z^3$, calcúlese la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ sobre la curva Γ.

Respuesta:

Pregunta 1. Por definición, el centro de masas de la superficie Σ descrita en el enunciado es un punto $(x_m, y_m, z_m) \in \mathbb{R}^3$, cuyas componentes están definidas por las integrales de superficie siguientes:

$$x_m = \frac{1}{M}\iint_\Sigma x\rho(x, y, z)d\sigma\,, \quad y_m = \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\rho(x, y, z)d\sigma\,, \quad z_m = \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\rho(x, y, z)d\sigma\,,$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de Σ y M es su masa, que viene dada por:

$$M = \iint_\Sigma \rho(x, y, z) d\sigma.$$

A la hora de calcular las cuatro integrales de superficie necesarias para determinar el centro de masas, nos fijamos primero en las propiedades de simetría de la superficie y las correspondientes propiedades de paridad de las funciones a integrar.

La ecuación cartesiana que describe Σ es una función par en las variables x e y, por tanto se trata de una superficie simétrica con respecto al eje Z. Además, como la densidad es par en x e y, las funciones a integrar en las componentes x_m e y_m del centro de masas son funciones impares en x e y, respectivamente. Por tanto:

$$\iint_\Sigma x\rho(x, y, z) d\sigma \;=\; \iint_\Sigma y\rho(x, y, z) d\sigma \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; x_m = y_m = 0\,.$$

Para calcular la tercera componente del centro de masas, z_m, debemos encontrar una parametrización, $\boldsymbol{\phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, para Σ. En este caso una sencilla consiste en utilizar como parámetros las coordenadas cartesianas x e y. Al hacerlo, resultan las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(u, v) = u\,, \quad y(u, v) = v\,, \quad z(u, v) = u^2 + 4v^2\,, \quad (u, v) \in D\,,$$

dónde D es la corona elíptica dada por:

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\;\; 2 \leq u^2 + 4v^2 \leq 4\right\}\,.$$

Calculamos ahora las dos integrales de superficie que faltan aplicando la definición. Para ello, obtenemos en primer lugar el vector normal a Σ asociado a la parametrización considerada, que es:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u, v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \dfrac{\partial y(u, v)}{\partial v} & \dfrac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} = (-2u\,,\, -8v\,,\, 1)\,,$$

cuya norma es:

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial v} \right\| = (1 + 4u^2 + 64v^2)^{1/2}\,.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M = \iint_\Sigma \rho(x, y, z) d\sigma &= \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \iint_D (1 + 4u^2 + 64v^2)^{-1/2}(1 + 4u^2 + 64v^2)^{1/2} dudv \\ &= \iint_D dudv = \pi(2 - 1) = \pi\,. \end{aligned}$$

Es decir, la masa de Σ es igual, en magnitud, al área de D que es la corona elíptica comprendida entre las elipses $u^2 + 4v^2 = 4$ y $u^2 + 4v^2 = 2$, antes descrita.

En cuanto a la otra integral de superficie, es:

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma z\rho(x,y,z)d\sigma &= \iint_D z(u,v)\rho(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \iint_D (u^2+4v^2)(1+4u^2+64v^2)^{-1/2}(1+4u^2+64v^2)^{1/2} dudv \\ &= \iint_D (u^2+4v^2) dudv\,.\end{aligned}$$

Para calcular esta integral doble efectuamos el cambio de variables:

$$u = r\cos\theta\,, \quad v = \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta\,,$$

cuyo jacobiano es $r/2$ y el dominio D^* en las nuevas variables viene dado por:

$$D^* = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \theta \in [0,2\pi] \quad r \in [\sqrt{2},2]\right\}\,.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma z\rho(x,y,z)d\sigma = \iint_D (u^2+4v^2)dudv &= \iint_{D^*} \frac{r^3}{2} d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{r^3}{2}dr\right)d\theta = \frac{2\pi}{8}\left(2^4 - (\sqrt{2})^4\right) = 3\pi.\end{aligned}$$

Por tanto, $z_m = \dfrac{3\pi}{\pi} = 3$, con lo que, finalmente, el centro de masas que se pide calcular es:

$$(x_m, y_m, z_m) = (0,0,3)\,.$$

Pregunta 2.

2.1. Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo y $\boldsymbol{F}$ es de clase uno (puesto que el campo escalar u lo es), para que este campo sea conservativo es condición suficiente que su rotacional sea cero. Si utilizamos la notación $\boldsymbol{F} := (L, M, N)$, esto significa que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &:= \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\,, \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\,, \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \\ &= \left(3y^2z^2 - \frac{\partial u}{\partial z}\,, 0\,, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = (0,0,0) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2z^2\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.\end{aligned}$$

De la segunda igualdad se deduce que el campo escalar u no puede depender de la variable x. Integrando en la primera con respecto a z se obtiene el valor de u buscado:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2z^2 \Longrightarrow u(x,y,z) = y^2z^3 + C(y)\,,$$

donde $C(y)$ es cualquier función de clase uno en $\mathbb{R}$ que, en el caso más general posible y debido a la segunda igualdad mencionada, solamente puede depender de y.

Alternativa.

Un procedimiento alternativo al que se acaba de utilizar consiste en recurrir al resultado según el cual en un dominio (abierto conexo) de $\mathbb{R}^3$ (en particular el propio $\mathbb{R}^3$) un campo vectorial continuo es conservativo si y solamente si es un campo de gradientes o, lo que es lo mismo, deriva de un potencial escalar.

En el caso que nos ocupa el campo $\boldsymbol{F} = (L, M, N)$ es de clase uno en $\mathbb{R}^3$ y por tanto continuo. Será entonces conservativo si y sólo si admite un potencial escalar $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^3$; es decir, si y sólo si $\exists \mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla \mathcal{U} := \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right) = (L, M, N) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial x} & = & 1 + x^2, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial y} & = & u, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,y,z)}{\partial z} & = & y^3 z^2 + 1. \end{array} \right.$$

Para ver si tal potencial $\mathcal{U}$ existe resolvemos este sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Integrando con respecto a z en la tercera igualdad se obtiene:

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \frac{y^3 z^3}{3} + z + C(x,y),$$

donde $C(x,y)$ es una función cualquiera de clase uno en $\mathbb{R}^2$ que, en el caso más general posible, puede depender de x e y.

Sustituyendo esta expresión de $\mathcal{U}$ en la primera igualdad e integrando con respecto a x resulta:

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 1 + x^2 \implies C(x,y) = x + \frac{x^3}{3} + K(y),$$

donde $K(y)$ es, en principio, una función de clase uno en $\mathbb{R}$ que en el caso más general posible puede depender de y. Se tiene, por tanto:

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \frac{y^3 z^3}{3} + z + x + \frac{x^3}{3} + K(y).$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión de $\mathcal{U}$ en la segunda igualdad, se determina el valor de u para que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo:

$$y^2 z^3 + K'(y) = u(x,y,z).$$

Como u es, por hipótesis, de clase uno en $\mathbb{R}^3$, $K(y)$ puede ser cualquier función de clase dos en $\mathbb{R}$.

2.2. Esta pregunta se puede responder sin necesidad de haber resuelto el apartado 1.

Para ello es muy conveniente darse cuenta de que, para el valor de $u = y^2z^3$ que se especifica, el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo, ya que es de clase uno y tiene rotacional nulo en $\mathbb{R}^3$, que es un conjunto simplemente conexo.

Utilizando esta propiedad, se pueden considerar dos formas razonables de responder que evitan tener que parametrizar la curva Γ. Ambas requieren que se determinen sus dos extremos.

Extremo final: $\boldsymbol{E_f}$. La primera componente del extremo final es nula, por tanto las otras dos se obtienen teniendo en cuenta que Γ se encuentra en el primer octante y resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales:

$$z^2 = y^2/4\,, \quad y^2/4 + z^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{2}\,,\, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E_f} = \sqrt{2}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Extremo inicial: $\boldsymbol{E_i}$. La segunda componente del extremo inicial es nula, por tanto las otras dos se obtienen teniendo en cuenta que Γ se encuentra en el primer octante y resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales:

$$z^2 = x^2\,, \quad x^2 + z^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E_i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Las dos formas de calcular la circulación son:

Primera: Calcular un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$.

Según se acaba de probar en la respuesta alternativa al apartado 1, un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$ para $u = y^2z^3$ es

$$\mathcal{U}(x, y, z) \;=\; \frac{y^3z^3}{3} + z + x + \frac{x^3}{3}\,.$$

Entonces, si representamos por $\Gamma(\boldsymbol{E_i}, \boldsymbol{E_f})$ el arco de la curva Γ considerado, la circulación que se pide es:

$$\int_{\Gamma(\boldsymbol{E_i},\boldsymbol{E_f})} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \mathcal{U}(\boldsymbol{E_f}) - \mathcal{U}(\boldsymbol{E_i}) = \frac{1}{3} - \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{12}\,.$$

Segunda: Aprovechar que la circulación de $\boldsymbol{F}$, que es conservativo, es independiente del camino que se siga para ir del punto inicial al punto final de la curva.

Entonces, la circulación sobre la curva $\Gamma(\boldsymbol{E_i}, \boldsymbol{E_f})$ que se pide es la misma que se obtiene, por ejemplo, si se calcula sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{E_i}\boldsymbol{E_f}}$ que une sus extremos, una de cuyas parametrizaciones es:

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; (\boldsymbol{E_f} - \boldsymbol{E_i})t + \boldsymbol{E_i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1-t), \sqrt{2}\,t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \quad t \in [0, 1].$$

Por tanto:

$$\int_{\Gamma(\boldsymbol{E_i},\boldsymbol{E_f})} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\overline{\boldsymbol{E_i}\boldsymbol{E_f}}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt,$$

donde:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r'}(t) &= \left(1+\frac{1}{2}(1-t)^2\,,\,\frac{t^2}{2}\,,\,\sqrt{2}t^3+1\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0\right)\\ &= t^2-\frac{(t-2)t+3}{2\sqrt{2}}\,,\end{aligned}$$

con lo que, finalmente, se obtiene:

$$\int_{\Gamma(\boldsymbol{E_i},\boldsymbol{E_f})}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\overline{\boldsymbol{E_i}\boldsymbol{E_f}}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^1\left(t^2-\frac{(t-2)t+3}{2\sqrt{2}}\right)dt\;=\;\frac{1}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{12}\,.$$

Alternativa. Si no se tiene en cuenta que $\boldsymbol{F}$ es conservativo queda la alternativa de calcular la circulación usando la definición, que es más ardua desde el punto de vista de los cálculos a realizar.

Para ello, es necesario encontrar una parametrización para la curva $\Gamma(\boldsymbol{E_i},\boldsymbol{E_f})$ que puede obtenerse parametrizando su proyección sobre el plano XY, que es la elipse de ecuación cartesiana:

$$2x^2+\frac{y^2}{2}=1\,.$$

Entonces, una parametrización de la curva con la orientación dada es:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\,,\quad y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\,,$$

donde cabe mencionar que, aunque el ángulo θ no es el ángulo polar, en este caso el rango de variación de ambos coincide.

Problema 2 (EC/EF)

Sea Ω el sólido de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\le z\le 4-\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ z<4\right\}$$

y sea Σ su superficie frontera orientada según el vector normal saliente. Se consideran asimismo los campos vectoriales:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+(z-1)^2}(0,1-z,y),\quad \boldsymbol{L}(x,y,z)=(x,y,z-1).$$

1. Calcúlese el flujo del campo $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}$ a través de Σ.

2. (1 punto) Estúdiese la existencia una función g de una variable real y tal que

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+(z-1)^2}(x,y,g(z))$$

sea un potencial vector de $\boldsymbol{F}$; de existir, se dice que $\boldsymbol{F}$ es un **rotor** o un **campo rotacional**.

3. Estúdiese si el campo $\boldsymbol{H}$ puede descomponerse como suma de un rotor más un campo conservativo.

Respuesta:

1. En primer lugar describamos la superficie Σ. Observamos que el límite inferior de z es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, por tanto $z \geq 0$; mientras que el superior es $z = 4 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que puede reescribirse como $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$, así pues Ω es interior al paraboloide y exterior a la esfera. Hagamos la intersección de estas dos superficies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z + (z-4)^2 = 4 \Leftrightarrow (z-4)^2 = 4 - z.$$

Dado que $z < 4$, dividiendo ambos miembros por $4 - z$ concluimos $z = 3$, por lo que la curva intersección de ambas superficies es la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, en el plano $z = 3$. Podemos decir que Σ está formada por la yuxtaposición de dos superficies regulares,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv z = x^2 + y^2, \quad z \leq 3, \\ \Sigma_2 &\equiv x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4, \quad z \leq 3. \end{aligned}$$

Parece muy largo parametrizar cada superficie y aplicar directamente la definición de flujo, así que vamos a calcular la divergencia de $\boldsymbol{H}$ y ver si podemos utilizar de alguna forma que la superficie es cerrada. Como la divergencia es un operador lineal, calculamos por separado la divergencia de $\boldsymbol{F}$ y la de $\boldsymbol{L}$; para la de $\boldsymbol{F}$ utilizamos la fórmula $\operatorname{div}(v\boldsymbol{V}) = (\operatorname{grad} v) \cdot \boldsymbol{V} + v \operatorname{div} \boldsymbol{V}$ escogiendo:

$$v(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \quad \boldsymbol{V}(x,y,z) = (0, 1-z, y).$$

Es evidente que la divergencia de $\boldsymbol{V}$ es nula; por otro lado, el gradiente de v es proporcional a $(x, y, z-1)$ que es perpendicular a $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0, 1-z, y)$ así pues la divergencia de $\boldsymbol{F}$ es nula. Naturalmente, a este resultado puede llegarse operando directamente. Tenemos entonces que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(x,y,z) = \operatorname{div} \boldsymbol{L}(x,y,z) = \operatorname{div}(x, y, z-1) = 3.$$

Calculemos ahora el flujo de $\boldsymbol{H}$ a través de Σ:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{H}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{\Sigma} \boldsymbol{L}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma}$$

Para calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ tenemos presente que el dominio de definición de dicho campo excluye el punto $(0,0,1)$ que está en el interior de Ω, como la divergencia de $\boldsymbol{F}$ es nula, podemos aplicar el teorema de Gauss a la superficie frontera del sólido

$$M = \{(x,y,z)\in\Omega,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \geq 1/4\}$$

En M el campo $\boldsymbol{F}$ está bien definido y es solenoidal, su frontera es $\partial M = \Sigma\cup S$, siendo S la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1/4$, podemos concluir que

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{S} \boldsymbol{F}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma},$$

supuesta S orientada según el vector normal saliente. Ahora bien, dicho vector normal saliente es proporcional a $(x,y,z-1)$ que ya hemos visto que es perpendicular a $\boldsymbol{F}$, luego el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ es nulo. Calculemos ahora el flujo de $\boldsymbol{L}$:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{L}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{L}(x,y,z)\ dxdydz = 3V(\Omega).$$

Para calcular el volumen de Ω basta observar que la proyección de este sólido sobre el plano XY es $x^2+y^2\leq 3$, por tanto:

$$V(\Omega) = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \left(4-\sqrt{4-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\right) dxdydz,$$

hacemos un cambio a coordenadas polares y, como el integrando no depende más que del radio,

$$V(\Omega) = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} (4-\sqrt{4-\rho^2}-\rho^2)\rho\, d\rho = 2\pi\left[2\rho^2+\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}-\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] = \frac{17\pi}{6},$$

con lo que se concluye que el flujo pedido es

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{H}\cdot\ d\boldsymbol{\sigma} = 3V(\Omega) = \frac{17\pi}{2}.$$

2. Calculemos el rotacional de $\boldsymbol{G}$ e impongamos que sea igual a $\boldsymbol{F}$, usaremos la fórmula $\operatorname{rot}(v\boldsymbol{V}) = (\operatorname{grad} v)\times\boldsymbol{V} + v\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ con

$$v(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+(z-1)^2};\ \boldsymbol{V}(x,y,z) = (x,y,g(z))$$

es inmediato que $\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$, por tanto

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{G}(x,y,z) = \operatorname{grad} \frac{x}{x^2+y^2+(z-1)^2} \times (x,y,g(z))$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -x^2+y^2+(z-1)^2 & -2xy & -2x(z-1) \\ x & y & g(z) \end{vmatrix}$$

Calculamos la primera componente del rotacional e imponemos que sea nula, para ello basta con considerar el numerador:

$$-2xyg(z) + 2x(z-1)y = 0 \Leftrightarrow g(z) = z-1, \ xy \neq 0.$$

Para este valor de g se cumple que la primera componente del rotacional es nula; tomando ya $g(z) = z-1$ y calculando las dos componentes restantes llegamos a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+(z-1)^2}(0, 1-z, y)$$

Por tanto para $g(z) = z-1$ el campo $\boldsymbol{G}$ es un potencial vector de $\boldsymbol{F}$ y podemos decir que $\boldsymbol{F}$ es un campo rotacional.

3. Dado que $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$ basta con encontrar un campo escalar φ tal que $\boldsymbol{L} = \operatorname{grad} \varphi$, pero esto es casi inmediato:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+(z-1)^2).$$

Llegamos a la siguiente descomposición para el campo $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \operatorname{grad} \varphi.$$

No es imprescindible calcular φ; puede razonarse su existencia diciendo que $\boldsymbol{L}$ es irrotacional y que su dominio de definición es todo el espacio y por tanto es conservativo.

Nota: Existe un teorema, llamado de *Helmholtz* (podéis consultar la wikipedia) que afirma que dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ en determinadas condiciones (de decrecimiento del campo), existen campos vectorial $\boldsymbol{G}$ y escalar g de forma que $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \operatorname{grad} g$. Esta descomposición es interesante porque además tiene un recíproco, que viene a decir que, de nuevo, en determinadas condiciones de decrecimiento, un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ viene caracterizado por su rotacional y su divergencia. Este resultado es de importancia en electromagnetismo y en relación con las ecuaciones de *Maxwell*. El ejercicio que hemos planteado en el examen es académico y no tiene ningún significado, pero nos sirve como disculpa para mencionar este resultado.

Problema 3 (EF)

Este problema consta de dos preguntas independientes.

Pregunta 1: Se considera el recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 4x^2 + y^2 \geq 1\}$.

a) Hallar la masa de D, sabiendo que la densidad en cada punto está definida como

$$\delta(x,y) = \frac{xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3}.$$

b) Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}}(x,y)$, definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Calcular la circulación I de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva frontera de D, orientada positivamente, aplicando solamente la definición de integral curvilínea.

c) Hallar razonadamente una relación teórica entre I y la masa de D, y a continuación cotejar dicha relación con los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Pregunta 2: Se considera el campo vectorial $\boldsymbol{G}(x,y) = \dfrac{1}{2x^2+y^2}(y,-x)$, definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Calcular la circulación de $\boldsymbol{G}$ a lo largo de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente.

b) Estudiar si $\boldsymbol{G}$ es campo conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Calcular la circulación de $\boldsymbol{G}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente.

Respuesta:

Pregunta 1:

a) La masa de D se define como la integral de la densidad:

$$\text{Masa}\,(D) = \iint_D \frac{xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3} dxdy.$$

El conjunto D. es un recinto proyectable sobre el eje X (es decir, delimitado entre dos funciones de variable x) :

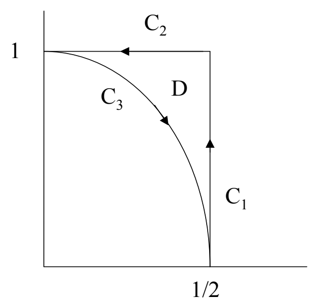
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \le x \le 1/2, \quad \sqrt{1-4x^2} \le y \le 1\right\},$$

así pues, calculamos la masa mediante integrales iteradas (integrando primero respecto a y, y luego respecto a x):

$$\text{Masa}\,(D) = \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{1-4x^2}}^1 \frac{xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3} dy\ dx = \int_0^{1/2} \left. \frac{(-x)}{\sqrt{4x^2+y^2}} \right|_{y=\sqrt{1-4x^2}}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(x - \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right) dx = \frac{1}{8} - \left. \frac{\sqrt{4x^2+1}}{4} \right|_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.$$

b) La frontera de D se compone de 3 tramos: un segmento vertical C_1, uno horizontal C_2 y un arco elíptico C_3:



- En el segmento vertical C_1, parametrizado como $(1/2, y)$, $y \in [0,1]$, con vector derivada $(0,1)$, se tiene la circulación

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = \left. \sqrt{1+y^2} \right|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

- El segmento horizontal, recorrido en sentido opuesto al deseado, se puede parametrizar como $(x, 1)$, $x \in [0, 1/2]$, con vector derivada $(1, 0)$. Por tanto, la integral curvilínea a lo largo de C_2 es

$$\int_{C_2} \boldsymbol{F} = -\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}} dy = -\left.\frac{\sqrt{4x^2+1}}{4}\right|_0^{1/2} = \frac{1-\sqrt{2}}{4}.$$

- Por último, el arco C_3 de la elipse $4x^2+y^2=1$ contenido en el primer cuadrante se parametriza (con orientación contraria al enunciado) como $(\cos t/2, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$ cuyo vector derivada es $(-\operatorname{sen}\, t/2, \cos t)$:

$$\int_{C_3} \boldsymbol{F} = -\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos t/2, \operatorname{sen}\, t)}{1} \cdot (-\operatorname{sen}\, t/2, \cos t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \frac{3}{4} \cos t \operatorname{sen}\, t dt = -\frac{3}{8}$$

Por tanto, la circulación I sobre la curva borde orientada positivamente es la suma de estas 3 circulaciones, es decir:

$$I = \int_{C_1} \boldsymbol{F} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} + \int_{C_3} \boldsymbol{F} = \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8}\left(2\sqrt{2}-3\right).$$

c) Según el teorema de Green, como F es de clase 1 en D (que no contiene al $(0, 0)$) y su curva borde es curva de Jordan recorrida positivamente, entonces podemos asegurar que

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

En nuestro caso

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}} \right) = -\frac{4xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+y^2}} \right) = -\frac{xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3}$$

así pues el teorema de Green garantiza que

$$I = \iint_D \frac{(-3)\, xy}{\left(\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3} dxdy = (-3)\, \text{Masa}\,(D),$$

es decir, que el valor de la circulación I es el opuesto del triple de la masa de D. Efectivamente, cotejamos que esta relación se cumple para nuestro resultado, pues

$$(-3)\, \text{Masa}\,(D) = (-3)\, \frac{3-2\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{8}\left(2\sqrt{2}-3\right) = I.$$

Pregunta 2:

a) La circulación de $\boldsymbol{G}$ sobre la elipse completa $E: 2x^2+y^2=1$ orientada positivamente es muy fácil de calcular: la parametrizamos como $\left(\cos t/\sqrt{2}, \text{sen } t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ cuyo vector derivada es $\left(-\text{sen } t/\sqrt{2}, \cos t\right)$:

$$\int_E \boldsymbol{G} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\text{sen } t, -\cos t/\sqrt{2}\right)}{1} \cdot \left(-\text{sen } t/\sqrt{2}, \cos t\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) dt = -\sqrt{2}\pi.$$

b) Obviamente $\boldsymbol{G}$ no es campo conservativo, pues si lo fuera, su integral a lo largo de la curva cerrada E habría sido nula.

c) Al parametrizar la circunferencia $C: x^2+y^2=1$ y plantear la integral curvilínea de $\boldsymbol{G}$ a lo largo de esta curva C, llegamos a una integral de tipo elíptico que no sabemos resolver. Por tanto, abordaremos otra estrategia: dado que $\boldsymbol{G}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, podemos aplicar el Teorema de Green en el recinto A delimitado entre la elipse E y la circunferencia C. Dado que ambas están orientadas positivamente, el teorema garantiza que

$$\int_C \boldsymbol{G} = \int_E \boldsymbol{G} + \iint_A \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

Calculamos dichas derivadas parciales:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{2x^2+y^2}\right) = \frac{2x^2-y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x^2+y^2}\right) = \frac{2x^2-y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$$

que resultan ser iguales, luego $\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0$. Por tanto, llegamos finalmente a que

$$\int_C \boldsymbol{G} = \int_E \boldsymbol{G} = -\sqrt{2}\pi.$$

Convocatoria extraordinaria

Problema 1

Sea el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x + 2y + 1$. Se pide:

1. Calcular el volumen del recinto $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq x + 2y + 1\right\}$.
2. Calcular el momento de inercia del sólido Ω con respecto al eje z; considerando que la densidad del sólido es la unidad.

Respuesta:
1.-

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_{proy_{xy}\Omega} dxdy \int_{x^2+y^2}^{x+2y+1} dz = \iint_{proy_{xy}\Omega} \left(x + 2y + 1 - x^2 + y^2\right) dxdy$$

Calculemos la proyección de Ω sobre el plano XY.

$$proy_{xy}\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + 2y + 1\right\} \Leftrightarrow \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + 2y + 1 - x^2 - y^2\right\} \Longleftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 1 + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - (y-1)^2\right\}$$

Concluimos que:

$$proy_{xy}\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{9}{4}\right\}$$

Cambiando a coordenadas polares:

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\rho\cos\theta \\ y = 1 + \frac{3}{2}\rho\sin\theta \end{array} \quad \Rightarrow |JT| = \frac{9}{4}\rho$$

La integral queda:

$$V_\Omega = \iint_{proy_{xy}\Omega} \left[\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (y-1)^2\right] dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{9}{4}\left(1 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta\right)\frac{9}{4}\rho d\rho d\theta =$$
$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{9}{4}\left(1 - \rho^2\right)\frac{9}{4}\rho d\rho d\theta = \frac{81}{16}2\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{81\pi}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{81\pi}{32}$$

2.-

$$I_z(\Omega) = \iiint_\Omega 1\left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iint_{proy_{xy}\Omega} \left(x^2 + y^2\right)\left(x + 2y + 1 - x^2 + y^2\right) dxdy$$

Utilizando el mismo cambio del apartado 1.

$$I_z(\Omega) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\rho\cos\theta\right)^2 + \left(1+\frac{3}{2}\rho\sin\theta\right)^2\right] \frac{9}{4}\left(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta\right)\frac{9}{4}\rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{81}{16}\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\rho\cos\theta+3\rho\sin\theta+\frac{9}{4}\rho^2\right)\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho d\theta$$

Como la integral del seno y del coseno a un periodo completo es 0; nos queda:

$$I_z(\Omega) = \frac{81}{16}\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\frac{5}{4}+\frac{9}{4}\rho^2\right)\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho d\theta = \frac{81}{16}2\pi\int_0^1 \left(\frac{5}{4}\rho+\rho^3-\frac{9}{4}\rho^5\right)d\rho =$$

$$= \frac{81\pi}{32}\left(\frac{5}{2}+1-\frac{3}{2}\right) = \frac{81\pi}{16} = 2M_\Omega$$

Problema 2

En el plano XY se da el dominio triangular D de vértices

$$A(0,-2)\ ,\quad B\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\ ,\quad C\left(-\sqrt{3},1\right)\ .$$

Sea Σ la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se proyecta sobre D, y sea Γ la curva borde de Σ.

Se define el campo vectorial $\boldsymbol{F} = (z-y)\boldsymbol{i} + (x-z)\boldsymbol{j} + (y-x)\boldsymbol{k}$.

Se pide la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo del arco Γ recorrido de modo que su proyección sobre el plano XY se recorra en sentido antihorario.

Respuesta:

Denotamos por Γ^+ la curva Γ recorrida en el sentido del enunciado y por Σ^+ la porción de superficie Σ orientada por el vector normal con tercera componente positiva.

Por el teorema de Stokes, se tiene

$$I := \int_{\Gamma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma^+} \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,.$$

Calculamos el rotacional de $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,.$$

Por tanto, si α, β, γ son los ángulos que forma el vector normal a Σ en cada punto con el sentido positivo de los ejes coordenados, se tiene

$$I = 2\iint_{\Sigma} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, d\sigma\,.$$

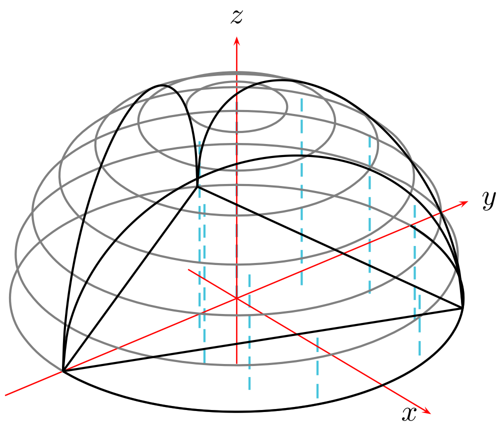


Figura 1: Porción de superficie esférica que se proyecta sobre un triángulo

Escribiendo la ecuación del paraboloide en la forma $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$, vemos que el vector $(2x, 2y, 1)$ es normal a él en cada punto y tiene la tercera componente positiva. Por tanto,

$$\frac{\cos\alpha}{2x} = \frac{\cos\beta}{2y} = \frac{\cos\gamma}{1} \, .$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_D (2x + 2y + 1)\cos\gamma \, \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \\ &= 4\iint_D x\, dxdy + 4\iint_D y\, dxdy + 2\iint_D dxdy = (2 + 4x_c + 4y_c)\cdot \text{Área}(D)\, , \end{aligned}$$

donde (x_c, y_c) representa el baricentro o centroide del triángulo. El baricentro es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo. Una mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Es bien sabido que las coordenadas del baricentro de un triángulo coinciden con la media aritmética de las respectivas coordenadas de los vértices, es decir:

$$x_c = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3}\, ; \qquad y_c = \frac{1 - 2 + \sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}\, .$$

También es sabido que, dados los vértices $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ de un triángulo, su área es la mitad del valor absoluto de un determinante en la forma

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right| .$$

En nuestro caso,

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\, ,$$

de donde

$$\begin{aligned} I &= 2\left(1+2\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}+2\,\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(12-3\sqrt{2}+10\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)=4-\sqrt{2}+\sqrt{6}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\,. \end{aligned}$$

A título orientativo, esta expresión es aproximadamente 10,81.

Problema 3

Sea Γ la línea poligonal cerrada de vértices $(0,\pm 1)$, $(\pm 1/2, 0)$, y sea la elipse E : $4x^2+y^2=1$, ambas orientadas positivamente. Se consideran los campos vectoriales

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\frac{1}{4x^2+y^2}(-y,x),\quad \boldsymbol{G}\,(x,y)=\left(y,y\sqrt{4x^2+y^2}\right)$$

así como el campo $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$, definido en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Se pide:

1. Hallar la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva E. ¿Es $\boldsymbol{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?
2. Razonar si es cierta o falsa esta afirmación:

   "La circulación de $\boldsymbol{G}$ sobre la elipse E es 4 veces la circulación de $\boldsymbol{G}$ sobre el arco de elipse de E contenido en el primer cuadrante".
3. Hallar la circulación del campo $\boldsymbol{H}$ sobre la curva E. Ídem sobre la poligonal Γ.
4. Estudiar la veracidad o falsedad de esta afirmación (demostrándola en caso de ser cierta, o bien aportando un contraejemplo concreto en caso de ser falsa):

   "La circulación de $\boldsymbol{H}$ a lo largo de una curva de Jordan que rodee al $(0,0)$ no tiene por qué ser cero, pero es independiente de la curva de Jordan que lo rodea (salvo signo)".

Respuesta:

1. En los puntos de la elipse E, se observa que el campo $\boldsymbol{F}$ coincide con el campo $(-y,x)$. Al ser este campo de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y la elipse una curva cerrada orientada positivamente, podemos aplicar el teorema de Green a este último campo, obteniendo:

$$\int_E \boldsymbol{F}=\int_E(-y,x)=\iint_{int(E)}2\;dx\;dy=2\text{Área}\,(int(E))=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Se ha utilizado que E es una elipse de semiejes de longitudes $1/2$ y 1, luego su interior tiene área $\pi/2$.

En cuanto a la pregunta sobre si $\boldsymbol{F}$ es campo conservativo, obviamente NO lo es, pues si lo fuera, su integral a lo largo de la curva cerrada E habría sido nula. (Obsérvese que $\boldsymbol{F}$ es un campo que sí verifica $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$, pero esto no asegura que $\boldsymbol{F}$ sea conservativo).

2. En todos los puntos de la elipse E, se observa que el campo $\boldsymbol{G}$ coincide con el campo (y, y). Para calcular la circulación de $\boldsymbol{G}$ a lo largo de la elipse E la parametrizamos como $((\cos t)/2, \text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$, cuyo vector derivada es $(-(\text{sen } t)/2, \cos t)$. Así se obtiene

$$\begin{aligned}\int_E \boldsymbol{G} = \int_E (y, y) &= \int_0^{2\pi} (\text{sen } t, \text{sen } t) \cdot (-(\text{sen } t)/2, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\text{sen}^2\, t + \cos t\ \text{sen } t\right) dt = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, su arco E_1 incluido en el primer cuadrante se parametriza igual, salvo que el parámetro $t \in [0, \pi/2]$, llegándose a

$$\begin{aligned}\int_{E_1} \boldsymbol{G} &= \int_0^{\pi/2} (\text{sen } t, \text{sen } t) \cdot (-(\text{sen } t)/2, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\text{sen}^2\, t + \cos t\ \text{sen } t\right) dt = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Obviamente, la primera integral no es 4 veces la segunda, así que la afirmación es FALSA:

$$\int_E \boldsymbol{G} \neq 4 \int_{E_1} \boldsymbol{G}.$$

(Nótese que la integral a lo largo de $\boldsymbol{G}$ también podría haberse calculado aplicando el teorema de Green al campo (y, y), llegando al mismo resultado $-\pi/2$. En cambio, a lo largo de E_1 no puede aplicarse pues obviamente E_1 no es curva cerrada).

3. Con los resultados anteriores tenemos directamente la circulación de $\boldsymbol{H}$ sobre E:

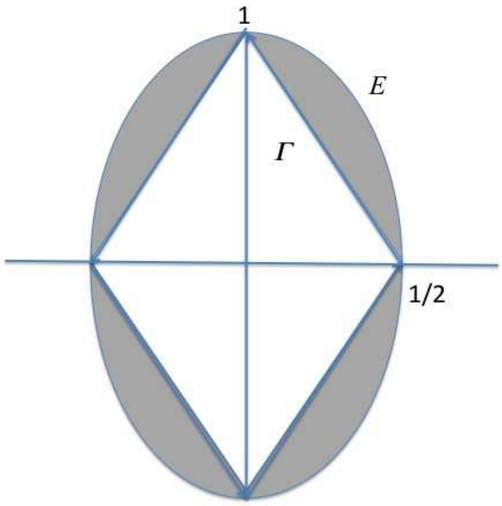
$$\int_E \boldsymbol{H} = \int_E \boldsymbol{F} + \int_E \boldsymbol{G} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

En cuanto a la poligonal Γ, podríamos parametrizar los cuatro segmentos que la conforman, y calcular la circulación de $\boldsymbol{H}$ a lo largo de ella, pero se obtienen unas integrales bastante largas de resolver. En cambio, intentaremos aplicar otros resultados teóricos que nos lleven a la solución: llamemos D al recinto compacto delimitado entre la poligonal Γ y la elipse E (zona sombreada en el dibujo). Como $(0, 0)$ no

pertenece a dicho recinto D, entonces $\boldsymbol{H}$ es de clase C^1 en D y podemos aplicar el Teorema de Green al campo $\boldsymbol{H}$ y al recinto D :

$$\int_E \boldsymbol{H} = \int_\Gamma \boldsymbol{H} + \iint_D \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dxdy$$

donde ambas curvas E, Γ están orientadas positivamente, y hemos utilizado que la poligonal Γ está contenida en el interior de la elipse E, como se observa en el dibujo.



Así pues, despejamos la circulación de $\boldsymbol{H}$ a lo largo de Γ :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \boldsymbol{H} &= \int_E \boldsymbol{H} - \iint_D \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= \frac{\pi}{2} - \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy - \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned} \quad (10)$$

La primera integral doble es nula puesto que se observa que $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{4x^2 + y^2} \right) = \frac{-4x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{4x^2 + y^2} \right) = \frac{-4x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy &= \iint_D \left(\frac{4xy}{\sqrt{4x^2 + y^2}} - 1 \right) dxdy \\ &= \iint_D \frac{4xy}{\sqrt{4x^2 + y^2}} dxdy - \text{Área}\,(D)\,. \end{aligned}$$

Ahora observamos que esa última integral doble es nula, pues se trata de una función impar en x (y en y) en un dominio D que es simétrico tanto respecto al eje OY (como al eje OX). Así pues,

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy = -\text{Área}\,(D)\,.$$

La circulación pedida es, sustituyendo en la igualdad (10)

$$\int_\Gamma \boldsymbol{H} = \frac{\pi}{2} + \text{Área}\,(D)\,.$$

Tan sólo queda calcular el área del recinto D, que es el área del interior de la elipse $(\pi/2)$ menos el área del rombo de vértices $(0, \pm 1)$, $(\pm 1/2, 0)$ que vale 1. Luego Área$(D) = \pi/2 - 1$ y se llega finalmente a

$$\int_\Gamma \boldsymbol{H} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 1.$$

4. Obviamente la afirmación es FALSA, pues tanto E como Γ son curvas de Jordan que rodean al $(0, 0)$, y la circulación de $\boldsymbol{H}$ a lo largo de ellas no coincide ni siquiera en valor absoluto: sobre la elipse E tiene valor $\pi/2$, mientras que sobre Γ la circulación vale $\pi - 1$.

Curso 2015/16

Convocatoria ordinaria

Problema 1 (EC/EF)

Sea el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{(2\,x,\ b\,y,\ c\,z)}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}}$$

y la superficie S_1

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad z \leq 0$$

1. Calcular los valores de b y c que hacen $\boldsymbol{F}$ solenoidal.
2. Determinar una superficie S_2 de forma que $S = S_1 \cup S_2$ sea una superficie cerrada que no contenga en su interior el origen. Orientar S segÃºn el vector normal exterior y declarar qué orientaciones induce dicho vector en S_1 y S_2.
3. Para los valores de b y c calculados en el apartado 1. calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S_2. Ídem para S_1.

Respuesta:

1. Calculemos la divergencia de $\boldsymbol{F}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \operatorname{grad}(x^2+y^2+4z^2)^{-3/2}\cdot(2\,x,\ b\,y,\ c\,z)\\
&+ (x^2+y^2+4z^2)^{-3/2}\operatorname{div}(2\,x,\ b\,y,\ c\,z)\\
&= -3(x^2+y^2+4z^2)^{-5/2}\left(2\,x^2+b\,y^2+4c\,z^2\right)\\
&+ (x^2+y^2+4z^2)^{-3/2}(2+b+c)\\
&= \frac{-6x^2-3by^2-12cz^2+(2+b+c)(x^2+y^2+4z^2)}{(x^2+y^2+4z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Para que la divergencia sea nula, tiene que anularse el numerador de esta fracción:

$$(2 + b + c - 6)\, x^2 + (2 + b + c - 3b)\, y^2 + (2 + b + c - 3c)4\, z^2 = 0$$

Lo cual ocurre para cualquier (x, y, z) no nulo si, y solamente si:

$$2 + b + c = 6 = 3b = 3c$$

con lo que se concluye que los valores pedidos son $b = c = 2$.

2. Para que S no contenga el origen situamos S_2 en el semiespacio $z \leq 0$ y para que S sea cerrada escogemos el borde de S_2 igual al de S_1. Además, como vamos a integrar el campo $\boldsymbol{F}$ en S_2 es natural tomar medio elipsoide de modo que sobre la superficie el denominador del campo se simplifique. Tras estas reflexiones, escogemos S_2 como:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \quad z \leq 0$$

Observamos que, con esta elección, el elipsoide –cuyo tercer semieje es menor que 1– está en el interior de la esfera cerrada por lo cual la orientación normal exterior de S induce en S_1 la orientación $\boldsymbol{n}_1 = (x, y, z)$. El vector normal unitario $\boldsymbol{n}_2$ que orienta S_2 lleva la dirección y el sentido de $-(x, y, 4z)$. Es decir, la semiesfera queda orientada por el vector normal *saliente* de la esfera completa y el semielipsoide por el *entrante* del elipsoide.

3. Tomamos como parametrización de S_2

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta, \varphi) = \left(\operatorname{sen} \varphi \cos \theta,\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta,\ \frac{1}{2} \cos \varphi \right).$$

Es sabido que si tomamos los parámetros en el orden (θ, φ) la orientación del elipsoide completo es la normal entrante, que es la que deseamos. Además, como $z \leq 0$ tenemos que hacer variar φ entre $\pi/2$ y π, mientras que θ varía en $[0, 2\pi]$. La función que tenemos que integrar es

$$g := \boldsymbol{F}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

que podemos calcular como un determinante,

$$g(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \cos \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} \varphi.$$

El flujo I_2 de $\boldsymbol{F}$ a través de S_2 es:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} -\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right) d\theta = -2\pi.$$

Por último, para calcular el flujo a través de S_1 aplicamos el teorema de Gauss al campo $\boldsymbol{F}$ sobre la superficie S, el campo es solenoidal por lo que la integral de volumen es nula, y se obtiene:

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

concluimos que el flujo I_1 de $\boldsymbol{F}$ que atraviesa S_1 es:

$$I_1 = \int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -I_2 = 2\pi.$$

Problema 2 (EC/EF)

Siendo $a > 0$ una constante, se considera la curva dada por las ecuaciones

$$\Gamma \equiv \begin{cases} az = a^2 - x^2 - y^2 \\ (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \end{cases}$$

en la región $x \geq 0$. Se pide calcular la circulación del campo vectorial

$$\boldsymbol{F} := (z - y\,,\, x - z\,,\, y - x)$$

a lo largo de la curva Γ recorrida de modo que su proyección sobre el plano XY se recorra en sentido antihorario.

Se asignan 0,15 puntos por la presentación y 0,15 puntos por la simplificación de los resultados y cálculos intermedios.

Respuesta:

La primera ecuación representa un paraboloide de revolución con eje de simetría en el eje OZ. La segunda es una superficie cilíndrica de generatriz paralela al eje OZ, que corta al plano XY en la lemniscata con la misma ecuación que, en coordenadas polares, tiene la forma $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Es bien sabido que esta curva está definida en el semiplano $x \geq 0$ para los ángulos

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,,\, \frac{\pi}{4}\right].$$

Se tiene

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} \equiv (2, 2, 2)\,.$$

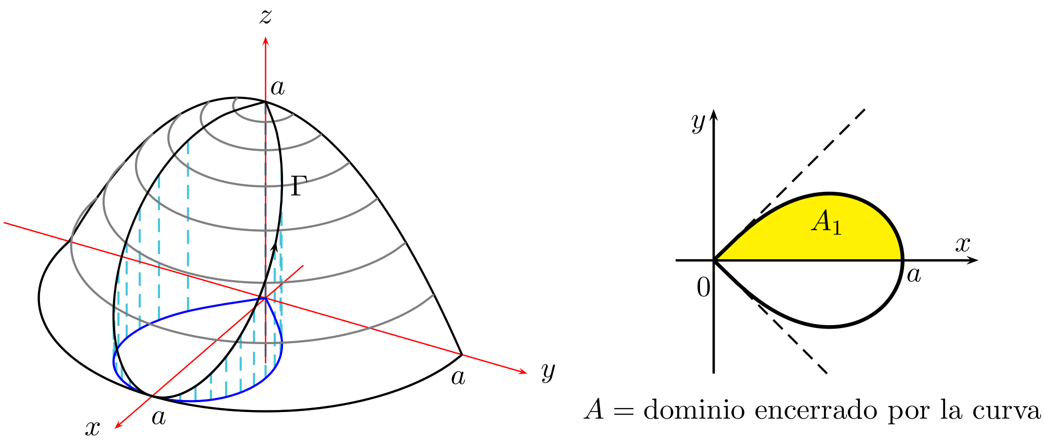


Figura 2: Curva en un paraboloide que se proyecta en un bucle de lemniscata

Denotamos por Γ^+ la curva Γ recorrida en el sentido dado por el enunciado, y por Σ^+ la porción del paraboloide encerrada por Γ y orientada por el vector normal de tercera componente positiva. Por el Teorema de Stokes se tiene:

$$\begin{aligned} I := \int_{\Gamma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_{\Sigma^+} (\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma} (2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma)\, d\sigma \\ &= 2\iint_A (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado los cosenos directores de la superficie Σ y hemos llamado A al dominio plano $(x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2)$ con $x \ge 0$.

Escribiendo la ecuación del paraboloide en la forma $az + x^2 + y^2 - a^2 = 0$, vemos que el vector $(2x, 2y, a)$ es normal a su superficie en cada punto. Por tanto,

$$\frac{\cos\alpha}{2x} = \frac{\cos\beta}{2y} = \frac{\cos\gamma}{a}$$

de donde

$$I = 2\iint_A \left(\frac{2x}{a} + \frac{2y}{a} + 1\right) dxdy = 2\iint_A \left(\frac{2x}{a} + 1\right) dxdy = \frac{4}{a}\iint_A x\,dxdy + 2\iint_A dxdy$$

ya que la integral doble de y es nula por simetría.

Calculamos la última integral:

$$\begin{aligned} \iint_A dxdy &= 2\iint_{A_1} dxdy \qquad (A_1 \text{ es la mitad “superior” de } A) \\ &= 2\iint_{A_1'} \rho\, d\rho d\theta \qquad (A_1' \text{ es } A_1 \text{ en coordenadas polares}) \\ &= 2\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\, d\rho \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = a^2 \left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\,, \end{aligned}$$

y la penúltima:

$$\begin{aligned}
\iint_A x\,dxdy &= 2\iint_{A_1} x\,dxdy = 2\iint_{A_1'} \rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho^2\,d\rho \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\cos\theta(\cos 2\theta)^{3/2}\,d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\cos\theta(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}\,d\theta \qquad (u:=\operatorname{sen}\theta) \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}}(1-u^2-u^2)^{3/2}\,du \qquad \left(t:=2u^2 \quad\Rightarrow\quad u=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad du=\frac{dt}{2\sqrt{2}\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^1(1-t)^{3/2}\,\frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{t}} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{3/2}\,dt \\
&= \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi a^3}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}\,.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = \frac{4}{a}\iint_A x\,dxdy + 2\iint_A dxdy = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4} + a^2 = \left(1+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)a^2\,.$$

Solución alternativa

Resolvemos ahora el problema sin utilizar los cosenos directores (sino parametrizando la superficie) ni la función Beta. Por brevedad, algunos cálculos de la solución anterior no se repiten.

La curva Γ puede contemplarse como borde de la superficie Σ parametrizada por

$$\Phi : A = \{(u^2+v^2)^2 \leq a^2(u^2-v^2),\, u \geq 0\} \to \mathbb{R}^3$$
$$\Phi(u,v) = \left(u,\, v,\, \frac{1}{a}(a^2-u^2-v^2)\right)$$

El vector normal asociado es

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \left(\frac{2}{a}\,u,\, \frac{2}{a}\,v,\, 1\right);$$

la tercera componente positiva indica que la orientación es coherente con el recorrido de la curva que se nos indica. El rotacional del campo (calculado en el método anterior) es constante e igual a $(2,2,2)$ por lo que la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ es, en aplicación del teorema de Stokes,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \frac{4}{a}\iint_A (u+v)\,dudv + 2\iint_A dudv$$

El recinto A es simétrico respecto del eje de abscisas, por lo que

$$\iint_A v\,dudv = 0$$

El área de A se ha calculado antes y vale $a^2/2$. La integral restante va a calcularse fácilmente sin utilizar la función Beta. Si se pasa a coordenadas polares se llega a:

$$\iint_A u\,dudv = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\cos\theta(\cos 2\theta)^{3/2}d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\cos\theta(1-2\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}\,d\theta$$

El cambio $\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t$ transforma el intervalo de integración en $[0,\pi/2]$; se deriva $\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \cos t\,dt$ y se sustituye:

$$\iint_A u\,dudv = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt\,.$$

Utilizamos la fórmula del ángulo doble,

$$\cos^4 t = \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right).$$

Todas las integrales de coseno son nulas, así pues:

$$\iint_A u\,dudv = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)dt = \frac{\sqrt{2}\,a^3\,\pi}{16}\ .$$

Y, para finalizar, la circulación pedida es:

$$I = \frac{4}{a}\frac{\sqrt{2}\,a^3\,\pi}{16} + a^2 = a^2\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}+1\right)\ .$$

Nota

Si se intenta calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ sin utilizar el Teorema de Stokes, es decir, parametrizando la curva Γ y aplicando la definición de integral curvilínea, se llega enseguida a integrales muy complicadas que no interesa intentar calcular. Este es, pues, un ejemplo en que la aplicación del Teorema de Stokes es muy conveniente o quizá imprescindible.

Problema 3 (EF)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región acotada por las superficies $z = x^2+y^2$, $z = 10-x^2-2y^2$.

1. Escriba unas ecuaciones cartesianas para la proyección de Ω sobre el plano XY y unas ecuaciones cartesianas para el propio Ω que demuestren que es un dominio simple en $\mathbb{R}^3$.

2. Escriba en coordenadas cartesianas una integral reiterada formada por tres integrales simples que represente el volumen de Ω.

3. Decida si Ω se puede representar de forma más sencilla en algún sistema de coordenadas distinto del cartesiano y, en caso afirmativo, escriba unas ecuaciones para el dominio transformado de Ω en el nuevo sistema de coordenadas elegido.

4. Calcule el volumen de Ω de la forma que considere más sencilla.

Respuesta:

1. La proyección es $\Omega_{XY} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2x^2+3y^2\le 10\}$.

   Unas ecuaciones para Ω como las que se piden son

   $$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le z\le 10-x^2-2y^2\,,\ \ (x,y)\in\Omega_{XY}\}$$

   .

2. Utilizando la notación:
$$f(x) = \left(\frac{3}{10}\left(1 - \frac{2x^2}{10}\right)\right)^{1/2}$$
una de esas integrales reiteradas es:
$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} dx \left(\int_{-f(x)}^{f(x)} dy \left(\int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz\right)\right)$$

3. El sistema de coordenadas está formado por la coordenada z y por las coordenadas elipsoidales en el plano dadas por:
$$x = \sqrt{\frac{10}{2}} u \cos v \,, \quad y = \sqrt{\frac{10}{3}} u \operatorname{sen} v \,, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \,.$$
En este sistema de coordenadas
$$\Omega' = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le u \le 1 \,, \; 0 \le v \le 2\pi \,, \; g(u, v) \le z \le h(u, v)\}\}$$
donde
$$g(u, v) = 10u^2 \left(\frac{\cos^2 v}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 v}{3}\right) \,, \quad h(u, v) = 10 - 10u^2 \left(\frac{\cos^2 v}{2} + \frac{2 \operatorname{sen}^2 v}{3}\right)$$

4. El volumen es
$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^1 du \left(\int_0^{2\pi} dv \left(\int_{g(u,v)}^{h(u,v)} |J(u, v)| \, dz\right)\right) \\ &= \int_0^1 du \left(\int_0^{2\pi} (h(u, v) - g(u, v)) \, |J(u, v)|\right) dv \; = \\ &= \frac{200\pi}{\sqrt{6}} \int_0^1 (u - u^3) \, du \; = \frac{50\pi}{\sqrt{6}} \,. \end{aligned}$$
El jacobiano es:
$$J = \frac{10u}{\sqrt{6}} \,.$$

Problema 4 (EF)

(Este problema consta de dos preguntas independientes)

1. Sea $\boldsymbol{F} = (P, Q) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\,,\,(-1/2,1/2)\})$ tal que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Se sabe que, además:

$$\int_{x^2+y^2-5y=0} Pdx + Qdy \;=\; -\pi\,, \quad \int_{x^2+y^2=9} Pdx + Qdy \;=\; 0\,,$$

donde las curvas se suponen recorridas en sentido positivo. Escriba en el recuadro el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{(x-2)^2+y^2/9=1} Pdx + Qdy \;=\; -\pi$

b) $\displaystyle\int_{(x+1)^2+y^2/4=1} Pdx + Qdy \;=\; \pi$

donde de nuevo las curvas se consideran recorridas en sentido positivo.

2. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en Ω. Suponiendo que todas las curvas y superficies que aparecen son de clase C^1, decida razonadamente si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados.

a) Si Σ es una superficie cerrada orientada según la normal saliente y está contenida en Ω, se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en el interior de Σ .
Respuesta: Falso. Para que el teorema de Gauss se pueda aplicar a $\boldsymbol{F}$ en el recinto $\text{int}(\Sigma)$, el campo $\boldsymbol{F}$ debe ser de clase C^1 en un abierto que contenga a Σ y a su interior. Sabemos que $\boldsymbol{F}$ es de clase C^1 en Ω y que Σ está contenida en Ω, *pero esto en principio no implica que se cumpla* $\text{int}(\Sigma) \subset \Omega$. Veamos un contraejemplo: el campo newtoniano $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/\left\|\boldsymbol{r}\right\|^3$ es de clase uno en $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Sea Σ la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Claramente Σ está contenida en Ω pero el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ no está contenido en Ω, y por ello, en este caso, no se puede aplicar el teorema de Gauss a $\boldsymbol{F}$ en el recinto $\text{int}(\Sigma)$.

b) Sea Γ una curva cerrada contenida en Ω. Sea Σ una superficie cuyo borde es Γ y tal que Γ y Σ están orientadas de forma coherente. Entonces se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Stokes a $\boldsymbol{F}$ y Σ.
Respuesta: Falso. Para que se pueda aplica el teorema de Stokes a un campo $\boldsymbol{F}$ y a una superficie Σ con borde orientado, el campo $\boldsymbol{F}$ debe ser de clase C^1 en un abierto que contenga a la superficie y además la superficie Σ y su curva frontera Γ deben estar orientados de forma coherente. Pues bien, aunque en este caso la segunda condición se cumple, la primer condición no tiene por qué cumplirse. En efecto, aunque Γ está contenida en Ω (conjunto en el que $\boldsymbol{F}$ está definido y es de clase C^1), *la superficie* Σ *no tiene por qué estarlo* y por ello en principio no tienen por qué cumplirse las condiciones para aplicar el teorema. Veamos un contraejemplo: el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y,z)$$

es de clase $C^1 1$ en $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash$eje z. Sea Γ la curva dada por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

y orientada de forma positiva sobre el plano XY. Nótese que Γ está contenida en Ω. Sea Σ la superficie, que se apoya sobre Γ, definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ z &\geq 0, \end{aligned}$$

y consideremos que está orientada de forma coherente con Γ. Pues bien, $\boldsymbol{F}$ no es de clase C^1 en ningún abierto que contenga a Σ y por ello no se cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Stokes.

El siguiente es otro contraejemplo que hace uso del campo newtoniano $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/\left\|\boldsymbol{r}\right\|^3$. $\boldsymbol{F}$ es de clase C^1 en $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Sea Γ la circunferencia

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

que claramente está contenida en Ω. Sea ahora Σ la superficie definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

(es decir, la porción del plano XY contenida dentro de la curva Γ). Como Σ contiene al origen, $\boldsymbol{F}$ no está definida sobre Σ y no existe ningún abierto que contenga a Σ en el que $\boldsymbol{F}$ sea de clase C^1 , por lo que no se cumplen las condiciones para aplicar Stokes.

Nota: Para que la respuesta se considere correcta, en caso de ser cierto un enunciado se debe razonar adecuadamente su veracidad (por ejemplo enunciado el resultado o teorema que se esté utilizando). En caso de ser falso, se debe razonar adecuadamente su falsedad (por ejemplo proporcionando un contraejemplo).

Convocatoria extraordinaria

Cuestiones tipo test

Cuestión 1: Sea el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{(x,\, y,\, z)}{(x^2 + 3y^2 + z^2)^{3/2}}$$

y sea Ω su dominio de definición. Entonces:

1. $\boldsymbol{F}$ es conservativo en Ω V ☐ F ☒
2. $\boldsymbol{F}$ admite potencial vector en Ω V ☐ F ☒
3. El flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de cualquier superficie cerrada contenida en Ω es nulo V ☐ F ☒
4. $\boldsymbol{F}$ es un campo central V ☐ F ☒
5. $\boldsymbol{F}$ admite potencial escalar en Ω V ☐ F ☒
6. $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en Ω V ☒ F ☐
7. $\boldsymbol{F}$ es irrotacional en Ω V ☐ F ☒
8. El flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de cualquier superficie contenida en Ω depende únicamente de su borde V ☐ F ☒

Expresemos el campo $\boldsymbol{F} = g\boldsymbol{G}$. Su divergencia es $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} g \cdot \boldsymbol{G} + g \operatorname{div}\boldsymbol{G}$ y su rotacional $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{G} + g \operatorname{rot}\boldsymbol{G}$. Si tomamos $g(x, y, z) = (x^2 + 3y^2 + z^2)^{-3/2}$ y $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (x, y, z)$ y efectuamos los cálculos,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{F} = -3(x^2 + 3y^2 + z^2)^{-5/2}(x, 3y, z) \times (x, y, z) \neq 0$$

Al no ser $\boldsymbol{F}$ irrotacional ya podemos decir que 1, 4, 5 y 7 son falsas; mientras que 6 es cierta.

Si tomamos la superficie cerrada Σ de ecuación $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ orientada por el vector normal saliente,

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} = \iint_\Sigma \boldsymbol{G} = \iiint_{\operatorname{int}\Sigma} \operatorname{div}\boldsymbol{G} = 3V(\operatorname{int}\Sigma) \neq 0.$$

lo que implica que 2, 3 y 8 son falsas.

Cuestión 2: Sea Γ la curva frontera del recinto plano D limitado por las curvas:

$$y = 2x^2,$$
$$y = |x| + 1.$$

Sean Γ_1 y Γ_2 las ramas de Γ situadas, respectivamente, en el primer y segundo cuadrante, ambas con origen en $(0, 0)$.

Sea el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}\right)$

1. La circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ_1 es $\log\sqrt{2}$ V $\boxed{\times}$ F $\boxed{}$
2. La circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ, recorrida en sentido positivo, es $\log 2$

   V $\boxed{}$ F $\boxed{\times}$
3. La circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ_2 es $-\log\sqrt{2}$ V $\boxed{}$ F $\boxed{\times}$
4. El área de D es $5/3$ V $\boxed{\times}$ F $\boxed{}$

El campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ cumple $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$; al ser de clase C^∞ y su dominio de definición todo $\mathbb{R}^2$ podemos afirmar que es conservativo. La curva Γ es cerrada, luego la circulación es nula. Las curvas Γ_1 y Γ_2 tienen los mismos extremos, $(0,0)$ el inicial y $(0,1)$ el final, luego la circulación a lo largo de ambas coincide. Podemos calcular muy fácilmente un potencial

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2+1}$$

Por tanto,

$$\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s} = f(0,1) - f(0,0) = \log\sqrt{2}.$$

Alternativamente, dado que la circulación es independiente del camino, podemos escoger como curva el segmento $\boldsymbol{r}(t) = (0,t)$, $0 \le t \le 1$ cuyo vector tangente es $\boldsymbol{r}'(t) = (0,1)$ y la circulación:

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(0,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt \\ = \int_0^1 Q(0,t)dt &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\log(t^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 2. \end{aligned}$$

En cuanto al área, D es simétrico respecto del eje OY, en el primer cuadrante se tiene el área encerrada entre la recta $y = x+1$ y la parábola $y = 2x^2$,

$$A(D) = 2\int_0^1 (x+1-2x^2)\,dx = \frac{5}{3}.$$

Cuestión 3: Sea Ω el conjunto definido por:

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 \le 1\}.$$

con densidad constante igual a 1.

1. (Rodéese la respuesta correcta) La masa de Ω es

   $\boxed{2\pi^2}$ $3\pi^2$ $2\pi^3$ 2π
2. (Rodéese la respuesta correcta) El momento de inercia de Ω respecto al eje OZ es

   $4\pi^2$ $7\pi^2$ $\boxed{7\pi^2/2}$ Ninguna de las anteriores
3. El momento de inercia de Ω respecto al eje OX es

   $5\pi^2/2$ $7\pi^2/4$ $\boxed{9\pi^2/4}$ Ninguna de las anteriores

4. Los momentos de inercia de Ω respecto al eje OX y respecto al eje OY coinciden

   V $\boxed{\times}$ F $\square$

Ω se obtiene por revolución alrededor del eje OZ del disco $(x-1)^2+z^2 \le 1$ situado en el plano XZ. En virtud del teorema de Guldin, su volumen (masa, con densidad constante igual a 1) es el producto del área del disco (π^2) por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad del disco (2π).

También puede calcularse la masa mediante una integral triple; para ello expresamos el dominio en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} &x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z=\lambda, \quad J_3(\rho,\theta,\lambda)=\rho \\ &\Omega^*=\{(\rho,\theta,\lambda),\ (\rho-1)^2+\lambda^2\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\,\} \end{aligned} \tag{11}$$

y hacemos el cambio de variable,

$$M(\Omega)=\iiint_{\Omega^*}\rho\,d\rho\,d\theta\,d\lambda = 2\pi\iint_{(\rho-1)^2+\lambda^2\le 1}\rho\,d\rho\,d\lambda=\cdots=2\pi^2$$

Esta última integral puede hacerse mediante el cambio:

$$\rho=1+r\cos t,\ \lambda=r\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0\le r\le 1,\ 0\le t\le 2\pi,\ J_2(r,t)=r \tag{12}$$

o bien relacionándola con la primera componente del centroide del disco.

Para calcular los momentos de inercia utilizaremos los dos cambios de variable (11) y (12).

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz=\iiint_{\Omega^*}\rho^3\,d\rho\,d\theta\,d\lambda \\ &= 2\pi\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+r\cos t)^3 r\,dr\,dt=\cdots=\frac{7\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes OX y OY coinciden, basta observar las simetrías de Ω.

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,dxdydz=\iiint_{\Omega^*}(\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\lambda^2)\rho\,d\rho\,d\theta\,d\lambda$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta\iint_{(\rho-1)^2+\lambda^2\le 1}\rho^3\,d\rho\,d\lambda+2\pi\iint_{(\rho-1)^2+\lambda^2\le 1}\lambda^2\rho\,d\rho\,d\lambda=\cdots=\frac{9\pi^2}{4}.$$

Problema 1

Se considera el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\,,\,-\frac{2(x^2+y^2-x)}{(x-1)^2+y^2}\right).$$

1. Calcule la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la circunferencia, C, de centro el punto $(1,0)$ y radio 1 recorrida en sentido positivo.
2. Calcule razonadamente todos los valores que puede tomar la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre una curva de Jordan de clase C^1 que no pase por el punto $(1,0)$.
3. Demuestre que $\boldsymbol{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ pero sí lo es en el dominio $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>2\big\}$ y determine un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$ en Ω.

Respuesta:

1. La ecuación cartesiana de la circunferencia C es: $(x-1)^2+y^2=1$. Por tanto, el valor que toma el campo $\boldsymbol{F}$ sobre ella es muy sencillo, ya que el denominador de sus dos componentes vale 1 sobre C y el numerador de la segunda componente : $-2(x^2+y^2-x)$ toma el valor $-2x$ también sobre C (esto se comprueba sin más que tener en cuenta que de la ecuación de C resulta $x^2+y^2=2x$). Además, la circunferencia admite la parametrización $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$, donde:

$$x(t)=1+\cos t\,,\quad y(t)=\operatorname{sen} t\,,\quad t\in[0,2\pi]\,.$$

Resulta entonces adecuado calcular la circulación que se pide utilizando la definición; es decir, teniendo en cuenta el valor que toma $\boldsymbol{F}$ sobre C:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_C 2(y,-x)\cdot d\boldsymbol{s}=2\int_0^{2\pi}(y(t),-x(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt$$

donde:

$$(y(t),-x(t))\cdot(x'(t),y'(t))=(\operatorname{sen} t\,,\,-(1+\cos t))\cdot(-\operatorname{sen} t\,,\,\cos t)=-(1+\cos t)\,.$$

Por tanto:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-2\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\,dt=-4\pi\,,$$

que es el valor de la circulación que se pide calcular.

2. Como, según establece el enunciado, el punto $(1,0)$ no pertenece a ninguna de las posibles curvas de Jordan que se consideran, la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre todas ellas siempre está bien definida. Para calcular todos los valores posibles que puede tomar comprobamos si se cumple la igualdad de derivadas cruzadas de las componentes de $\boldsymbol{F}$, para ver en qué condiciones podemos utilizar el teorema de Green. Utilizando la notación $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y)\,,Q(x,y))$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=2\,\frac{y^2-(x-1)^2}{(y^2+(x-1)^2)^2}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=2\,\frac{y^2-(x-1)^2}{(y^2+(x-1)^2)^2}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\,,$$

es decir, las componentes de $\boldsymbol{F}$ cumplen la igualdad de derivadas cruzadas en el dominio de definición del campo, que es $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$.

Entonces, los valores que puede tomar la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre una curva de Jordan de clase C^1 que no pase por el punto $(1,0)$ son tres:

a) Si el recinto acotado limitado por la curva de Jordan, Γ, contiene el punto $(1,0)$ entonces la circulación vale lo mismo que a lo largo de la circunferencia C del primer apartado si Γ está orientada positivamente y toma ese valor con signo menos si está orientada negativamente; es decir, los valores posibles en este caso son $\pm4\pi$. Esta afirmación es consecuencia de que el dominio acotado cuya frontera está formada por ambas curvas (C y Γ) no contiene el punto $(1,0)$ y, por tanto, en el se cumple la igualdad de derivadas cruzadas de las componentes de $\boldsymbol{F}$. En estas condiciones, el teorema de Green permite concluir que la circulación sobre ambas curvas recorridas en el mismo sentido es la misma.

b) Si el punto $(1,0)$ no está en el recinto acotado limitado por la curva de Jordan, Γ, entonces la circulación es cero. Se demuestra aplicando el teorema de Green a Γ y al recinto acotado que limita, en el que se cumple la igualdad de derivadas cruzadas.

3. Una de las caracterizaciones de los campos conservativos establece lo siguiente: Sea D un dominio de $\mathbb{R}^n$ y sean $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^n$ continuo. Entonces se verifica: $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D si y sólo si la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cualquier camino cerrado contenido en D es nula.

- Según se obtiene en el apartado 1, la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre la circunferencia C no es nula y esta curva está contenida en el dominio de definición del campo que es el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Por tanto, la caracterización anterior demuestra que $\boldsymbol{F}$ no es conservativo en este conjunto.
- El dominio $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 2\right\} \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo (y además estrellado) y en el se cumple la igualdad de derivadas cruzadas de las componentes de $\boldsymbol{F}$. Esto nos permite concluir que $\boldsymbol{F}$ admite en Ω un potencial escalar y que, por tanto, es ahí conservativo.
- El razonamiento que se acaba de exponer garantiza la existencia de un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$ en Ω. Para calcularlo sabemos que, por definición, si U representa el potencial, se cumple:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)\,,$$

  donde se ha vuelto a utilizar la notación: $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y)\,, Q(x,y))$. Integrando con respecto a y en la segunda igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= -2\int \frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}\,dy + K(x) \\ &= -2\int dy - 2\int \frac{1}{(x-1)\left(1+\left(\frac{y}{x-1}\right)^2\right)}\,dy + K(x) \\ &= -2y - 2\,\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) + K(x)\,, \end{aligned}$$

  donde $K(x)$ es una constante arbitraria de integración con respecto a y que, en el caso más general posible, podrá depender de la variable x.

  Utilizamos ahora la primera igualdad. Derivando la expresión de U que se acaba de obtener con respecto a x y sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y - 2\,\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) + K(x)\right) = P(x,y) := -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow$$
$$\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} + K'(x) = -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow K'(x) = 0\,,$$

  con lo que integrando con respecto a x resulta: $K(x) = C$. Por tanto, el potencial buscado es:

$$U(x,y) = -2y - 2\,\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) + C\,,$$

  donde C es una constante real arbitraria.

Problema 2

Sea Γ el borde de la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+4y^2 \leq 1;\ z = x^2+y^2\}$$

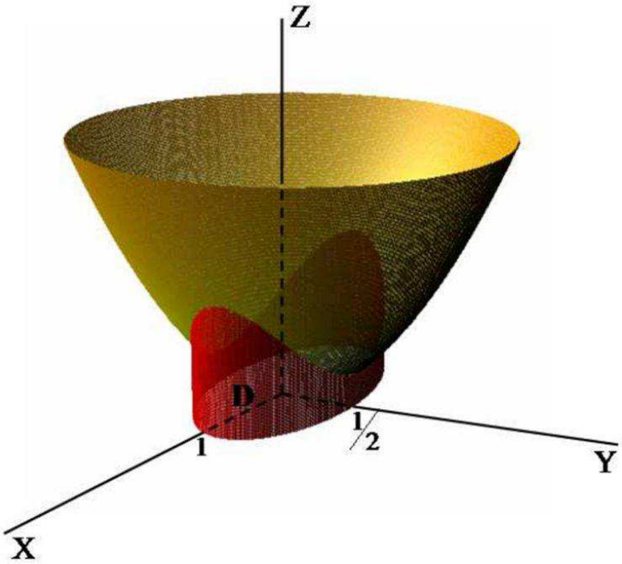
y $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2 z, y^2 x, yz)$$

1. Parametrice la curva Γ de forma que su proyección sobre XY se recorra en sentido antihorario.
2. Parametrice la superficie Σ de forma coherente con la parametrización de Γ del apartado interior, conforme a la regla de la mano derecha.
3. Calcule la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ.

Respuesta:

1. Parametrización de Γ.



$$x^2 + 4y^2 = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \Leftrightarrow x(t) = \cos t, y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t,\ t \in [0; 2\pi]$$

La ecuación paramétrica $\gamma(t)$ de Γ será por tanto:

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \cos^2 t + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 t)$$

La proyección P de la curva Γ en el plano XY tiene por ecuación:

$$p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} t)$$

que se recorre en sentido antihorario.

2. Parametrización de Σ.

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 4y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2\right\}$$

Una forma de representar la superficie Σ es considerando que la condición $x^2 + 4y^2 \leq 1$ puede representarse mediante la parametrización siguiente:

$$x(\rho, t) = \rho \cos t, \quad y(\rho, t) = \frac{\rho}{2} \operatorname{sen} t;\ \rho \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi]$$

con lo cual la parametrización de Σ quedaría:

$$\sigma(\rho,t)=(\rho\cos t,\frac{\rho}{2}\operatorname{sen} t,\rho^2\cos^2 t+\frac{1}{4}\rho^2\operatorname{sen}^2 t)$$

Otra forma equivalente (más cómoda a efectos prácticos) de parametrizar Σ es utilizando la función r:

$$r: D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\leq 1\}\to\mathbb{R}^3 : \quad r(x,y)=\big(x,y,x^2+y^2\big)$$

de tal forma que se tiene:

$$\Sigma=r(D)$$

En este caso, es fácil ver que el vector normal es

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}=(-2x,-2y,1)$$

y se cumplen las condiciones del problema.

3. Cálculo de la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ.

   Podemos calcular la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ de dos maneras diferentes:

   - Directamente. En este caso el cálculo es posible, pero más complicado.
   - Aplicando el teorema de Stokes.

   Aplicando el teorema de Stokes, se tiene:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}=\iint_\Sigma \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}=\iint_D \nabla\times\boldsymbol{F}\left(r(x,y)\right)\cdot\boldsymbol{n}(x,y)dxdy$$

   donde $\nabla\times\boldsymbol{F}=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ representa el rotacional de $\boldsymbol{F}$.

   Calculamos el rotacional, obteniendo:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2z & y^2x & yz\end{vmatrix}=(z,x^2,y^2)=(x^2+y^2,x^2,y^2)$$

   Calculando, tenemos:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=-2x^3-2xy^2-2x^2y+y^2$$

   Tenemos que calcular la integral siguiente.

$$\iint_D \left(-2x^3-2xy^2-2x^2y+y^2\right)dxdy\,,D=\{(x,y)\in\mathbb{R},x^2+4y^2\leq 1\}$$

   Indicamos los principales pasos de la integración: Realizamos, simplificando, el cambio de variable siguiente:

$$\begin{cases} x=\rho\cos t\\ y=\frac{\rho}{2}\operatorname{sen} t\end{cases}$$

   El jacobiano vale:

$$J=\frac{\rho}{2}$$

   Las variaciones de ρ,t son:

$$\rho\in[0,1];\ t\in[0,2\pi]$$

La integral queda así:

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2}\rho \left(-2\rho^3 \cos^3 t - \frac{1}{2}\rho^3 \cos t \operatorname{sen}^2 t - \rho^3 \cos^2 t \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\rho^2 \operatorname{sen}^2 t \right) d\rho}_{I} \, dt$$

Calculamos la integral *interior* I, obteniendo:

$$I = -\frac{1}{5}\cos^3 t - \frac{1}{20}\cos t \operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{10}\cos^2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{32}\operatorname{sen}^2 t$$

Calculando la integral resultante obtenemos finalmente:

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{5}\cos^3 t - \frac{1}{20}\cos t \operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{10}\cos^2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{32}\operatorname{sen}^2 t \right) dt = \frac{\pi}{32}$$

Curso 2016/17

Convocatoria ordinaria

Ejercicios de test (EC/EF)

1. Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ un campo vectorial de clase C^1 en $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0),(0,0),(2,0)\}$ que verifica

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

Se sabe que el campo $\boldsymbol{F}$ cumple

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = 1, \quad \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \int_{C_3} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = -2,$$

donde C_1, C_2 y C_3 son todas ellas circunferencias de radio 3, orientadas positivamente y centradas en los puntos $(-2,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$, respectivamente. Si C_4 es la circunferencia de centro el origen y radio 1, también orientada positivamente, entonces

$$\boxed{\int_{C_4} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = -1}$$

Se consideran los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 3\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Estudie la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

	V	F
(a) El conjunto A es simplemente conexo.	☐	■
(b) El campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo en A.	☐	■
(c) $\boldsymbol{F}$ admite un potencial escalar en D.	☐	■
(d) $\boldsymbol{F}$ admite un potencial escalar en B.	■	☐

2. Sea Γ el arco de cicloide dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \operatorname{sen}\theta, \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Entonces el centroide de Γ es (π, c_y), donde c_y es igual a

- ■ $4/3$
- □ $\pi/2$
- □ $3/2$
- □ $2/3$

Se denota mediante $s(\theta_0)$ la longitud del arco de cicloide determinado por las ecuaciones anteriores, donde $\theta \in [0, \theta_0]$. Sobre Γ se especifica una distribución de temperatura igual a $s^2(\theta)$. Entonces la temperatura promedio sobre Γ es igual a

- □ 8π
- □ 24
- ■ $64/3$
- □ $32/3$

Observación: La temperatura promedio sobre Γ se calcula integrando la distribución de temperatura sobre Γ y dividiendo el resultado por la longitud total de Γ.

Soluciones más detalladas

1. Si llamamos $a = \int_{C_\varepsilon} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C_ε es una circunferencia orientada positivamente, de centro el punto $(2, 0)$ y radio ε pequeño, entonces por el teorema de Green se tiene que

$$a + \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

y

$$a + \int_{C_4} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_3} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por tanto

$$\int_{C_4} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_3} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Obviamente el conjunto A no es simplemente conexo y el enunciado (a) es falso. El campo $\boldsymbol{F}$ no es conservativo en A debido a que la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre C_ε no es nula pues $a = -1$ y C_ε está contenida en A para ε suficientemente pequeño. Así, el apartado (b) es falso. Si el conjunto fuera $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$, como ocurre en el segundo modelo, la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier curva contenida en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$ sería nula y el campo sí sería conservativo en ese dominio. El enunciado (c) es claramente falso; si fuera verdadero, entonces la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier circunferencia contenida en D sería nula, pero esto no es cierto. Por último, como B es simplemente conexo y $\boldsymbol{F}$ verifica la igualdad de las derivadas cruzadas en B, el enunciado (d) es verdadero.

2. Si en general tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ y(\theta) = a(1 - \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad a > 0, \end{cases}$$

entonces el elemento de longitud correspondiente a la curva Γ viene dado por

$$ds = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta = 2a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

Por tanto

$$s(\theta) = \int_0^\theta ds = \int_0^\theta 2a \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

En particular, la longitud total de Γ es $8a$. Entonces

$$c_y = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} y(\theta)\, 2a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\, d\theta = \boxed{\frac{4}{3}\, a}$$

De manera análoga, la temperatura promedio será igual a

$$\frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} 16a^2\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 2a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a^2\int_{-1}^{1}(1+t)^2\, dt = \boxed{\frac{64}{3}\, a^2}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $-\cos(\theta/2) = t$.

Problema 1 (EC/EF)

1. Considere el campo vectorial definido por la expresión:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{3}{(3x^2+2y^2+z^2)^{5/2}}\,(-yz\,,\,2xz\,,\,-xy)\,.$$

(a) Justifique razonadamente la existencia de potencial vector para el campo $\boldsymbol{F}$ en la región $z > 1/2$.

(b) Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el campo vectorial

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \frac{1}{(3x^2+2y^2+z^2)^{3/2}}\,(\alpha\, x, y, z)$$

sea un potencial vector de $\boldsymbol{F}$ en dicha región y establezca el mayor dominio de $\mathbb{R}^3$ en el que, para el valor de α calculado, $\boldsymbol{G}$ tiene esta propiedad.

2. Sea Σ la superficie cónica de ecuación cartesiana $3x^2 + 2y^2 = (z+1)^2$ situada en el semiespacio $z \geq -1$ y sea E la superficie elipsoidal de ecuación implícita $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 5$. Denote por Γ la curva definida por la intersección de ambas superficies orientada de forma que su proyección sobre el plano XY se recorre en sentido positivo.

(a) Calcule el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de la porción acotada de Σ que tiene por borde la curva Γ y está orientada de modo coherente con la orientación de Γ.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la porción de cono sólido limitado por E y Σ, y $\partial\Omega$ su frontera. Halle razonadamente el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie $\partial\Omega$ orientada según el vector normal saliente.

Respuesta:
1 (a). El resultado que se debe emplear es el siguiente: *Una condición suficiente para que un campo vectorial admita potencial vector en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es que el campo sea solenoidal en Ω y Ω sea estrellado.*

En el ejercicio propuesto hay que decidir si el campo y el dominio satisfacen estas condiciones.

Campo. El campo $\boldsymbol{F}$ está definido en $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ y, además, es ahí de clase C^∞, con lo que su divergencia está bien definida en todo su dominio de definición. Falta ahora calcularla para averiguar si el campo es solenoidal (su divergencia es cero); para ello, usando la notación, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} &\overset{def}{=} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{45xyz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{7/2}} - \frac{60xyz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{7/2}} + \frac{15xyz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{7/2}} = 0,\end{aligned}$$

luego, en efecto $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en su dominio de definición.

Región. La región $z > 1/2$, que denotaremos por $D \subset \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$, está contenida en el dominio de definición de $\boldsymbol{F}$ y, además, es un conjunto estrellado con respecto a cualquiera de sus puntos, pues contiene los segmentos que unen cualquier par de puntos contenidos en el.

Por tanto, $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en la región D que es un conjunto estrellado, con lo que el resultado que se ha enunciado al principio permite concluir que $\boldsymbol{F}$ admite potencial vector en D.

Comentario: Aunque $\boldsymbol{F}$ es también solenoidal en todo su dominio de definición, el conjunto $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ no es estrellado con respecto a ningún punto, ya que no contiene los segmentos que unen puntos simétricos con respecto al origen. Esta situación (campo solenoidal en dominio no estrellado) no permite concluir la existencia de potencial vector para $\boldsymbol{F}$ en ese dominio, ***pero tampoco*** *nos permite concluir que no exista. De hecho, en el apartado siguiente se establece la existencia de un potencial vector de $\boldsymbol{F}$ que, de hecho, lo es en todo $\mathbb{R}^3$ salvo el origen.*

1 (b). Por definición, $\boldsymbol{G}$ es potencial vector de $\boldsymbol{F}$ si y solo si el rotacional de $\boldsymbol{G}$ coincide con el campo $\boldsymbol{F}$; es decir, usando la notación $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$, se tiene que cumplir la igualdad vectorial siguiente:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G} \overset{def}{=} \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3).$$

Igualando componente a componente se obtienen las tres condiciones que se deben cumplir para que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$, de las que se espera obtener el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= -\frac{6yz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{5/2}} - \left(-\frac{3yz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{5/2}} \right) = F_1, \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z} &= \frac{3(3-a)xz}{(3x^2+2y^2+z^2)^{5/2}} = F_2 \Longleftrightarrow 3(3-a)xz = 2xz \Longleftrightarrow a = 1, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial 1} &= \frac{3(2a-3)xy}{(3x^2+2y^2+z^2)^{5/2}} = F_3 \Longleftrightarrow 3(2a-3)xy = -3xy \Longleftrightarrow a = 1.\end{aligned}$$

La igualdad de las primeras componentes se cumple para cualquier valor de α, mientras que la igualdad entre las dos restantes se da si y solo si α vale 1, que es valor que se pide determinar.

Para $\alpha = 1$ la expresión de $\boldsymbol{G}$ es:

$$\boldsymbol{G}_{pv}(x,y,z) = \frac{\boldsymbol{r}}{(3x^2+2y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \boldsymbol{r} = (x,y,z),$$

que está definido y es de clase C^∞ en la región D. Además, en ella se da la igualdad $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}_{pv} = \boldsymbol{F}$ y, por tanto, $\boldsymbol{G}_{pv}$ es potencial vector de $\boldsymbol{F}$ en D. Pero además, el dominio de definición de $\boldsymbol{G}_{pv}$ es $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$, y ahí es de clase C^∞ y también se cumple $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}_{pv} = \boldsymbol{F}$. Esto nos permite afirmar que, por definición, $\boldsymbol{G}_{pv}$ es potencial vector de $\boldsymbol{F}$ en todo $\mathbb{R}^3$ menos el origen; es decir, en todo el dominio de definición de ambos campos que es, por tanto, el mayor dominio en el que se da esta propiedad.

2. En la Figura 1 se representan la superficie cónica Σ, la superficie elipsoidal E y la curva orientada Γ, que es la intersección de ambas situada en $z \geq -1$. Su ecuación cartesiana se puede obtener resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones formado por las dos ecuaciones de las superficies:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2+2y^2=(z+1)^2 \\ 3x^2+2y^2+z^2=5 \end{array}\right.$$

La forma más sencilla de hacerlo es restar ambas ecuaciones miembro a miembro para obtener

$$z^2=(z+1)^2-5 \Longleftrightarrow 2z^2+2z-4=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

La solución buscada es $z=1$ (la otra no está en la región $z\geq -1$). Sustituyendo z por este valor en cualquiera de las dos ecuaciones que forman el sistema, se obtiene la proyección sobre el plano XY de Γ, que es la elipse $3x^2+2y^2=4$. Obviamente, unas ecuaciones de Γ son entonces:

$$3x^2+2y^2=4\,,\quad z=1\,.$$

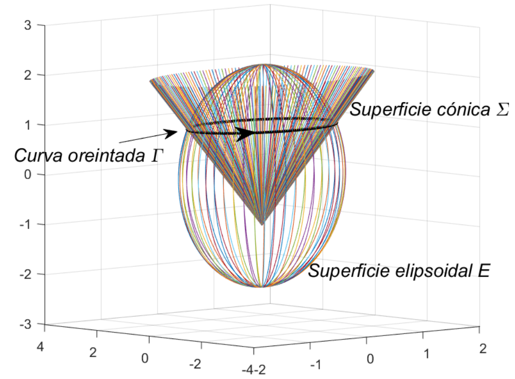


Figura 1. Superficies E y Σ y curva orientada Γ.

En lo que se refiere a su orientación, debe ser tal que su proyección sobre el plano XY se recorra en sentido positivo y, por tanto, es la que muestra la flecha en la Figura 1.

2 (a). A la hora de calcular el flujo de un campo vectorial sobre una superficie con borde orientado, como la representada en la Figura 2 que se considera en este apartado, conviene considerar tres posibilidades:

1. Utilizar el teorema de Stokes (si es posible).
2. Utilizar el teorema de Gauss (si es posible).
3. Parametrizar la superficie y utilizar la definición.

Se analizan a continuación cada una de las tres.

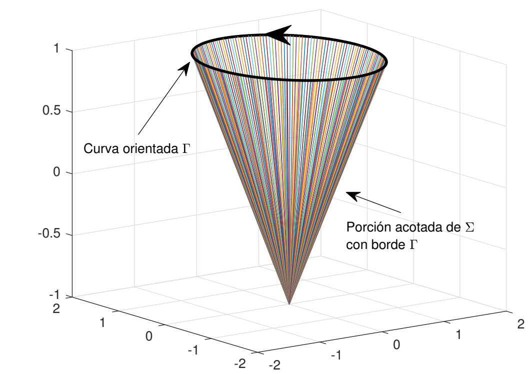


Figura 2. Porción acotada de Σ con borde orientado Γ.

2(a)-1. Teorema de Stokes. Un enunciado razonable de este teorema en $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:

Sea Σ una superficie en $\mathbb{R}^3$ orientable y de clase C^1 a trozos y denotemos mediante $\partial\Sigma$ su borde, que puede estar formado por una o varias curvas. Sea $A\subseteq\mathbb{R}^3$ un abierto que contiene a Σ y sea $\boldsymbol{H}: A\to R^3$ un campo de clase C^1. Entonces se cumple:

$$\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,,$$

donde Σ y $\partial\Sigma$ deben estar orientadas de forma coherente.

Si se pretende utilizar este resultado para calcular un flujo, además de verificar que se cumplen sus hipótesis, resulta imprescindible que el campo vectorial (cuyo flujo se pretende calcular) sea el rotacional de otro; es decir, que derive de un potencial vector. Como se ha probado en 1(b), $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}_{pv}$ y, por tanto, este es precisamente el caso que se plantea en el apartado 2(a). En consecuencia, si se cumplen las hipótesis, el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie que se pide será igual a la circulación de su potencial vector $\boldsymbol{G}_{pv}$ a lo largo del borde orientado Γ.

Comprobemos ahora las hipótesis. Si denotamos por Σ_a la porción acotada de la superficie cónica, es claro que existen abiertos en $\mathbb{R}^3$ que contiene a Σ_a en los que el campo $\boldsymbol{F}$ es de clase C^1: siempre se puede elegir un abierto que no contenga el origen pero sí contenga a Σ_a. Por tanto, efectivamente se cumple:

$$\iint_{\Sigma_a} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; \iint_{\Sigma_a} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \;\overset{Stokes}{=}\; \int_{\Gamma} \boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{s}\,.$$

Para calcular la circulación del potencial vector, es conveniente observar el valor que este campo toma sobre la curva Γ que está sobre la elipse E y, por tanto, sobre ella: $3x^2+2y^2+z^2=5$. Se tiene entonces:

$$\boldsymbol{G}_{pv}\Big|_{(x,y,z)\in\Gamma} = \frac{\boldsymbol{r}}{5^{3/2}}\,,\quad \boldsymbol{r}=(x,y,z)\,.$$

Pero Γ es una curva cerrada y $\boldsymbol{r}$ es un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^3$ (es irrotacional en un conjunto simplemente conexo). Por tanto, la circulación de $\boldsymbol{G}_{pv}$ a lo largo de Γ es cero y, por ende, también lo es el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ_a.

Resumiendo:

$$\iint_{\Sigma_a} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \overset{1(b)}{=} \iint_{\Sigma_a} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \overset{Stokes}{=}$$
$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{s} \overset{\Gamma\subseteq E}{=} \frac{1}{5^{3/2}}\int_{\Gamma} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{s} = (\Gamma \text{ cerrada y } \boldsymbol{r} \text{ conervativo}) = 0\,.$$

Si no se tiene en cuenta este último razonamiento, sería necesario parametrizar Γ, cuya ecuación cartesiana se ha obtenido anteriormente, y aplicar la definición de circulación. Una parametrización de Γ con la orientación dada es $\boldsymbol{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ con:

$$x(t)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos t\,,\quad y(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\,,\quad z(t)=1\,,\quad t\in[0,2\pi]\,,$$

por tanto:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t)=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,t\,,\ \sqrt{2}\cos t\,,\ 0\right)\,.$$

Entonces:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{s} \overset{def.}{=} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{G}_{pv}(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt,$$

donde:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{pv}(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t) &= \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos t\,,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\,,\ 1\right)}{(4\cos^2 t+4\,\mathrm{sen}^2\,t+1)^{3/2}}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,t\,,\ \sqrt{2}\cos t\,,\ 0\right)\\ &= \frac{8}{3(5^{3/2})}\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,.\end{aligned}$$

Con lo que, finalmente se obtiene:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{G}_{pv}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{8}{3(5^{3/2})}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,t\cos t\,dt = \frac{8}{3(5^{3/2})}\,\frac{\mathrm{sen}^2\,t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0\,.$$

2(a)-2. Teorema de Gauss. Un enunciado razonable de este teorema en $\mathbb{R}^3$ es el siguiente:

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un conjunto compacto tal que su frontera $\partial\Omega$ está formada por un número finito de superficies de clase C^1 a trozos. Sea $A\subset\mathbb{R}^3$ un abierto que contiene a Ω y $F: A\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en A. Entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\,dxdydz\,,$$

donde $\partial\Omega$ está orientada según la normal saliente a Ω.

Como se indica en el enunciado, este teorema se puede aplicar al cálculo de flujos a través de superficies cerradas y la que se considera en este apartado 2(a) no lo es. Sin embargo, en estas situaciones cabe la posibilidad de utilizarlo para cambiar la superficie con borde orientado por otra más conveniente. El razonamiento es como sigue:

Sea S_a la superficie con borde orientado de partida y sea S_b una superficie que tiene el mismo borde que S_a y tal que su unión $\partial\Omega \equiv S_a \cup S_b$ es la frontera de un compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, si se cumplen las hipótesis del teorema para este compacto, se tendría:

$$\iint_{\partial\Omega\equiv S_a\cup S_b} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \,=\, \iint_{S_a^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{S_b^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \overset{Gauss}{=} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\, dxdydz\,,$$

donde el superíndice "+" indica que las superficies deben considerarse orientadas según la normal saliente a Ω. De esta expresión se deducen las igualdades:

$$\iint_{S_a^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\, dxdydz \,-\, \iint_{S_b^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\, dxdydz \,+\, \iint_{S_b^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

donde el superíndice "−" indica la orientación contraria a la indicada por "+"; es decir, según la normal entrante al compacto Ω. Esta última igualdad es especialmente útil cuando el campo vectorial es solenoidal (tiene divergencia nula); en tal caso resulta que el flujo "que entra" en Ω a través de S_b es igual al flujo que sale de Ω a través de S_a.

Desde el punto de vista del problema planteado en este apartado, esto significa que se puede calcular el flujo a través de Σ_a que se pide en el enunciado como el flujo a través de otra superficie Σ_b con el mismo borde que Σ_a (porción acotada de la superficie cónica), con tal de que en el compacto que tiene por frontera $\Sigma_a \cup \Sigma_b$ el campo $\boldsymbol{F}$ esté definido y sea de clase C^1. Estas condiciones se cumplen si se elige Σ_b como la porción de la superficie elíptica E situada en la región $z \le 1$ (observe la Figura 1) que tiene por borde la curva Γ. El compacto Ω es el conjunto exterior al cono sólido, situado en la región $z \le 1$ y comprendido entre la superficie elíptica y la superficie cónica. Note que el campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal en Ω puesto que $(0,0,0) \notin \Omega$.

Aclaración: Otra forma de "cerrar" Σ_a con una superficie con el mismo borde es, por ejemplo, considerar el casquete de la superficie elíptica E situado en $z \ge 1$. Pero, en este caso, el compacto Ω que resulta sí contiene el origen y no puede aplicarse el teorema de Gauss.

Queda por decidir la orientación de Σ_a, que es la inducida por su borde Γ. Aplicando "la regla del sacacorchos" se ve fácilmente que la normal a considerar es la que tiene tercera componente positiva (entra en el cono solido de frontera Σ y, por tanto, sale del compacto Ω). Denotando por Σ_a^- esta superficie orientada, se tiene:

$$\iint_{\Sigma_a^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma_b^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{3}{(5)^{5/2}} \iint_{\Sigma_b^-} (-yz\,,\, 2xz\,,\, -xy)\cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

donde Σ_b^- está orientada según la normal que entra en Ω y en la última igualdad se tiene en cuenta el valor del campo $\boldsymbol{F}$ sobre la porción de superficie elíptica Σ_b^-.

Ahora bien, un vector normal a Σ_b^- es: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\nabla}(3x^2+2y^2+z^2-5) = -\,(6x,4y,2z)$, por tanto:

$$\iint_{\Sigma_b^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma_b^-} \boldsymbol{F}\cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}\, d\sigma = -\frac{3}{(5)^{5/2}} \iint_{\Sigma_b^-} (-yz\,,\, 2xz\,,\, -xy)\cdot \frac{(6x,4y,2z)}{\|\boldsymbol{n}\|}\, d\sigma$$
$$= -\frac{3}{(5)^{5/2}} \iint_{\Sigma_b^-} \frac{(-6xyz+8xya,-2xyz)}{\|\boldsymbol{n}\|}\, d\sigma = 0\,.$$

Observe que $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = 0$; es decir, el campo es tangente a la superficie en cada punto.

2(a)-3. Parametrizando Σ_a. La superficie Σ_a^- se puede parametrizar de varias formas. Quizá la más sencilla consista en utilizar coordenadas "cilíndricas" con base elíptica; es decir, coordenadas elípticas en

el plano XY y el eje OZ. Entonces, puesto que Σ_a^- está orientada de forma que la tercera componente de su vector normal sea positiva, una parametrización de Σ_a^- viene dada por $\mathbf{\Sigma}(t,\rho) = (x(t,\rho), y(t,\rho), z(t,\rho))$, con:

$$x(t,\rho) = \frac{\rho+1}{\sqrt{3}}\cos t\,, \quad y(t,\rho) = \frac{\rho+1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t\,, \quad z(t,\rho) = \rho\,, \quad (\rho,t) \in [-1,1]\times[0,2\pi]\,,$$

y el vector normal asociado a esta parametrización es:

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial t} = \left(-\frac{(\rho+1)}{\sqrt{2}}\cos t\,,\, -\frac{(\rho+1)}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\, t\,,\, \frac{\rho+1}{\sqrt{6}}\right)\,.$$

Entonces, por definición:

$$\iint_{\Sigma_a^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{[-1,1]\times[0,2\pi]} \boldsymbol{F}(\mathbf{\Sigma}(\rho,t))\cdot \frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial t} d\rho dt\,,$$

dónde:

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{\Sigma}(\rho,t))\cdot \frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}(\rho,t)}{\partial t} = \text{(después de pesados calculos)} = -\frac{(\rho+1)^2(2\rho+1)\cos t\ \mathrm{sen}\, t}{2(1+2\rho(\rho+1))^{5/2}}$$

Y, finalmente:

$$\iint_{\Sigma_a^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\left(\int_{-1}^{1} \frac{(\rho+1)^2(2\rho+1)}{2(1+2\rho(\rho+1))^{5/2}} d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos t\ \mathrm{sen}\, t\, dt\right) = 0\,.$$

2(b). A la hora de calcular el flujo de un campo vectorial sobre una superficie cerrada, como la representada en la Figura 3 que se considera en este apartado ("cucurucho de helado elíptico"), conviene considerar tres posibilidades:

1. Utilizar el teorema de Stokes (si es posible).
2. Utilizar el teorema de Gauss (si es posible).
3. Parametrizar la superficie y utilizar la definición.

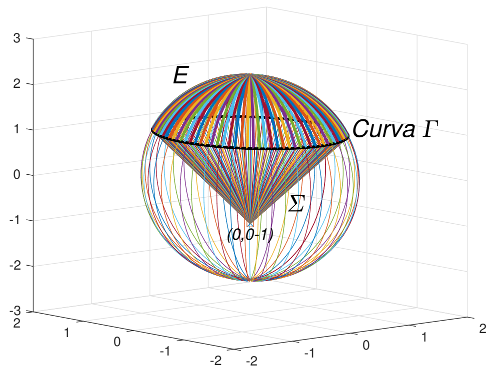


Figura 3. Frontera de la porción de cono sólido limitado por Σ y E.

2(b)-1. Teorema de Stokes. Una de las consecuencias importantes del Teorema de Stokes (ya enunciado en el apartado (2a)-1)) es la siguiente:

Corolario: El flujo de un campo de rotores (que deriva de un potencial vector) a través de una superficie cerrada de clase C^1 a trozos es nulo, siempre que la superficie esté contenida en un abierto en el que, en efecto, el campo derive de un potencial vector.

Un resumen de la demostración puede ser el siguiente. Sea $G = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}$ un campo de rotores en $A \subseteq \mathbb{R}^3$. La superficie cerrada S, contenida en A, siempre se puede dividir en dos porciones S_1 y S_2 con le mismo borde Γ y tales que $S_1 \cup S_2 = S$. En las hipótesis del *Corolario*, es posible aplicar el teorema de Stokes a S_1 y S_2, de forma que:

$$\int_{\Gamma^+} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{S_1^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,,\ \int_{\Gamma^-} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{S_2^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,,$$

donde se ha considerado que S_1 y S_2 están orientadas por la normal saliente al compacto que limita su unión S. Pero estas orientaciones significan que, al aplicar el teorema de Stokes, el borde común tiene que orientarse en un sentido para S_1 y en el contrario para S_2, con lo que, sumando miembro a miembro las dos expresiones anteriores se concluye el resultado.

En el caso que nos ocupa, se ha probado en 1(b) que el campo $\boldsymbol{F}$ deriva de un potencial vector en $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0\}$ y la superficie $\partial\Omega$ está contenida en el. Por tanto, el corolario que se acaba de enunciar permite afirmar que el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la cara exterior de $\partial\Omega$ es cero.

2(b)-2. Teorema de Gauss. Aunque la superficie $\partial\Omega$ a considerar es cerrada, el campo no está definido en el compacto que limita (que contiene el origen) y, por tanto, no es posible aplicar directamente el teorema de Gauss. Sin embargo, una de las consecuencias importantes de este teorema (ya enunciado en el apartado (2a)-2)) es que, a la hora de calcular el flujo de un campo a través de una superficie cerrada, permite afirmar que el flujo es el mismo a través de cualquier otra superficie cerrada obtenida deformando "suavemente" la de partida, con tal de que el campo sea solenoidal en el compacto que ambas limitan.

Este resultado tiene interés en el problema de este apartado porque el campo es efectivamente solenoidal en $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0\}$ y, por tanto, para calcular el flujo que se pide, es posible sustituir $\partial\Omega$ por otra superficie más sencilla de manejar. A la vista del denominador de $\boldsymbol{F}$, resulta conveniente elegir una superficie elipsoidal Σ_η de ecuación cartesiana:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = \eta > 5\,,$$

que siempre va a limitar un compacto que contiene a $\partial\Omega$ y, por tanto, en el compacto limitado entre ambas el campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal. Entonces:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \;=\; \iint_{\Sigma_\eta^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,,$$

donde el superíndice "+" indica la normal a la superficie que sale del compacto que limita. Entonces, razonamientos análogos a los utilizados en el apartado 2(a)-2 permiten escribir la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_\eta^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \iint_{\Sigma_\eta} \boldsymbol{F}\cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}\,d\sigma = \frac{3}{(\eta)^{5/2}}\iint_{\Sigma_\eta} (-yz\,,\,2xz\,,\,-xy)\cdot\frac{(6x,4y,2z)}{\|\boldsymbol{n}\|}\,d\sigma \\ &= \frac{3}{(\eta)^{5/2}}\iint_{\Sigma_\eta} \frac{(-6xyz+8xya,-2xyz)}{\|\boldsymbol{n}\|}\,d\sigma = 0\,.\end{aligned}$$

Observe que, nuevamente, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = 0$; es decir, el campo es tangente a la superficie Σ_η en cada punto. Note que aquí la normal tiene que ser la opuesta a la considerada en el apartado 2(a)-2 anterior.

2(b)-3. Parametrizando $\partial\Omega$. Es evidente que el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la cara exterior de $\partial\Omega$ es la suma de los flujos a través de de la porción de superficie elipsoidal E^+ orientada según el vector norma saliente a Ω y la porción de superficie cónica Σ_a^+ orientada según el vector normal opuesto al considerado en el apartado 2(a); es decir, con tercera componente negativa. Entonces:

$$\iint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma_a^+} \boldsymbol{F}\cdot\, d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{E^+} \boldsymbol{F}\cdot\, d\boldsymbol{\sigma} \;= 0\,,$$

donde el primer sumando es nulo como se demuestra en el apartado 2(a) y el segundo también es nulo puesto que, como se ha establecido anteriormente, el campo $\boldsymbol{F}$ es tangente a E^+ en todos su puntos (y también es tangente a todas las superficies elipsoidales de ecuación cartesiana $3x^2+2y^2+z^2=\eta\in\mathbb{R}^+$).

Problema 2 (EF)

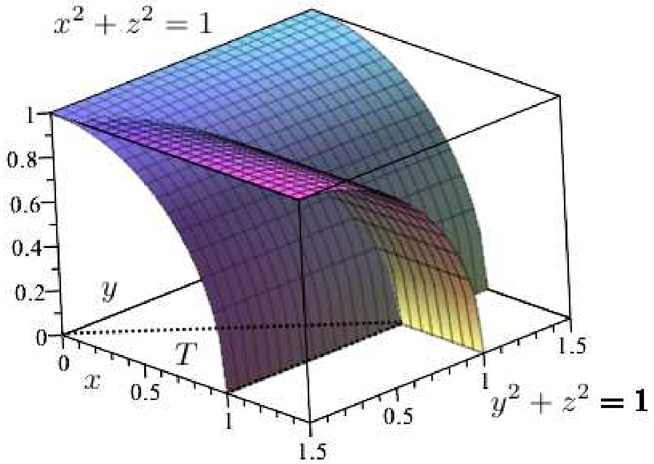
Dos cilindros circulares de ecuaciones

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = a^2, \qquad a > 0,$$

tienen ambos una distribución de masa superficial $\delta(x, y, z) = z^2$. Calcule la masa y el centro de masas de la porción de uno de ellos que es interior al otro en el octante positivo.

Respuesta:

Los dos cilindros se cortan ortogonalmente en el octante positivo a lo largo del plano $y = x$ según muestra la figura siguiente:



En la parte del espacio de $\mathbb{R}^3$ que se proyecta ortogonalmente sobre el triángulo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq a,\, y \geq 0,\, x \geq y\}$$

la superficie del cilindro $x^2+z^2 = a^2$ queda por debajo de la que tiene por ecuación $y^2+z^2 = a^2$. Llamemos Σ a esta porción de superficie. Eligiendo en el plano XY el triángulo suplementario del cuadrado de lado a se intercambiarían los papeles de los cilindros, pero esta otra elección no cambiaría el resultado final salvo una permutación en las variables que comentaremos más adelante.

La masa M y el centro de masas $\mathbf{c}$ de Σ se calculan mediante las integrales

$$M = \iint_\Sigma z^2\, d\sigma, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{M} \iint_\Sigma \boldsymbol{r}\, z^2\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Una parametrización sencilla de Σ viene dada por el hecho de que Σ es la gráfica de la función $z(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ cuando $(x, y) \in T$. Entonces el elemento de área $d\sigma$ admite la expresión

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, dxdy = \frac{a}{z(x, y)}\, dxdy.$$

Por tanto, obtenemos

$$M = a \iint_T z\, dxdy, \quad \mathbf{c} = \frac{a}{M} \iint_T \boldsymbol{r}\, z\, dxdy.$$

Para calcular la primera integral aplicamos el teorema de Fubini y se llega a

$$M = a\int_0^a \left(\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dy\right)dx = a\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a}{2}\left(-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{3}}$$

En cuanto al centro de masas, si llamamos $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, entonces se tiene

$$c_x = \frac{a}{M}\iint_T xz\,dxdy, \quad c_y = \frac{a}{M}\iint_T yz\,dxdy, \quad c_z = \frac{a}{M}\iint_T z^2\,dxdy.$$

Todas estas integrales son sencillas de calcular mediante el teorema de Fubini. En primer lugar

$$c_x = \frac{3}{a^3}\int_0^a \left(\int_0^x x\sqrt{a^2-x^2}\,dy\right)dx = \frac{3}{a^3}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 3a\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,\cos^2 t\,dt,$$

donde hemos efectuado el cambio de variable $x = a\operatorname{sen} t$ en el último paso. Por tanto

$$c_x = \frac{3a}{2}\,B(3/2,3/2) = \frac{3a}{2}\,\frac{\Gamma^2(3/2)}{\Gamma(3)} = \frac{3\pi}{16}\,a.$$

Análogamente

$$c_y = \frac{3}{a^3}\int_0^a \left(\int_0^x y\sqrt{a^2-x^2}\,dy\right)dx = \frac{3}{2a^3}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{3\pi}{32}\,a,$$

ya que es la misma integral que antes dividida por 2. Por último,

$$c_z = \frac{3}{a^3}\int_0^a \left(\int_0^x (a^2-x^2)\,dy\right)dx = \frac{3}{a^3}\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx = \frac{3}{4}\,a.$$

De manera que hemos obtenido

$$\boxed{\mathbf{c} = \frac{3a}{4}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, 1\right)}$$

Si hubiéramos usado la porción del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que queda por debajo de la de $x^2 + z^2 = a^2$ en el octante positivo, entonces hubiéramos obtenido el mismo vector pero intercambiando la primera y segunda componente.

Problema 3 (EF)

Sea Ω el sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2 + 2x + 2y$.

(a) Calcule el volumen de Ω.

(b) Calcule el momento de inercia de Ω respecto del eje de la variable z si se conoce que la distribución de densidad sobre Ω es constante e igual a 1.

Respuesta:

(a) La intersección de las dos superficies viene dada por las ecuaciones

$$z = x^2 + y^2 = 2 + 2x + 2y.$$

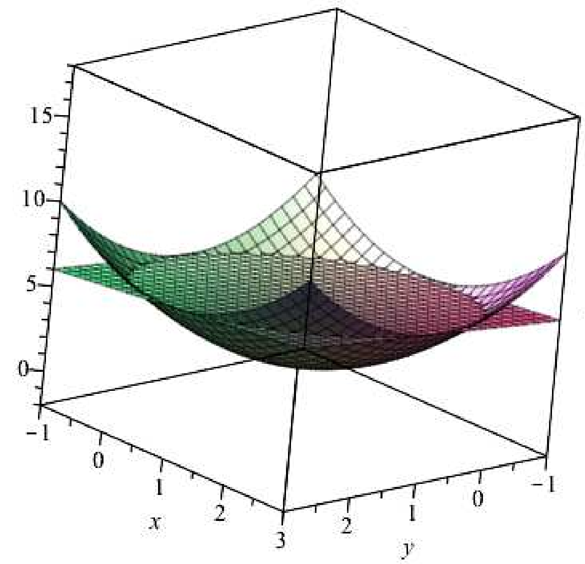
Por tanto, si consideramos el conjunto $\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\right\}$ y definimos las funciones $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = 2 + 2x + 2y$, entonces se cumple

$$f_1(x,y) \leq f_2(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

y ambas funciones toman el mismo valor sobre la frontera de $\overline{D}$. Así, el sólido Ω se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in \overline{D}, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\right\}.$$

Véase la figura siguiente para una representación gráfica aproximada.



Por tanto, el volumen V de Ω se calcula mediante la integral siguiente

$$V = \iint_{\overline{D}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} 1\, dz \right) dxdy = \iint_{\overline{D}} \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right) dxdy$$

$$= \iint_{\overline{D}} \left(4 - (x-1)^2 - (y-1)^2\right) dxdy.$$

Y ahora lo más sencillo es, primero, hacer el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos t, \\ y = 1 + r \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi],\ r \in [0,2], \end{cases}$$

cuyo jacobiano es r. Y, segundo, aplicando ahora el teorema de Fubini, obtenemos

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = 2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{8\pi}$$

(b) La distancia al eje z viene dada por la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Por tanto, el momento de inercia pedido I se calcula mediante la integral

$$I = \iint_{D} \left(x^2 + y^2\right) \left(4 - (x-1)^2 - (y-1)^2\right) dxdy.$$

Seguimos ahora un razonamiento parecido al cálculo del volumen, efectuando el mismo cambio de coordenadas. Como

$$(1 + r\cos t)^2 + (1 + r\,\mathrm{sen}\, t)^2 = 2 + r^2 + 2r\left(\cos t + \mathrm{sen}\, t\right),$$

y

$$\int_0^{2\pi} \left(\cos t + \mathrm{sen}\, t\right) \, dt = 0,$$

se cumple que

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (2 + r^2)(4 - r^2)\, r \, dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^2 \left(8r + 2r^3 - r^5\right) \, dr = \boxed{\frac{80}{3}\pi}$$

Convocatoria extraordinaria

Cuestiones tipo test

1. Dado el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(yx^2, g(x)\big)$, determinar una función $g(x)$, tal que $g(0)=0$, que haga que $\boldsymbol{F}(x,y)$ sea conservativo. Determinar, en ese caso, un potencial escalar asociado $f(x,y)$.

$$g(x) = \qquad\qquad\qquad f(x,y) =$$

Respuesta:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \boldsymbol{F}(x,y) = \left(yx^2, \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\nabla f = \boldsymbol{F} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = yx^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f(x,y) = \frac{yx^3}{3} + k\,.$$

---

2. Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{z^2+1}, \frac{x}{1+y^2}, e^y\right)$$

y la curva (Γ) definida por $\gamma(t) = \big((1+t^2)^2, 1, t\big)$, $t \in [0,1]$, la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de (Γ) vale:

a) $2-e$ ☐

b) $e-2$ ☐

c) $e+2$ ■

d) $2e$ ☐

Respuesta:

$$\gamma'(t) = \big(4t(1+t^2), 0, 1\big)\,, \quad \boldsymbol{F}(\gamma(t)) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{(1+t^2)^2}{2}, e\right) \Rightarrow F\left(\gamma(t)\right)\cdot\gamma'(t) = e + 4t$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \boldsymbol{F} = \int_0^1 (e+4t)dt = \big[et + 2t^2\big]_0^1 = e + 2\,.$$

---

3. Sea C frontera del cuadrado $D = [0,1]\times[0,1]$ recorrida en sentido antihorario. Calcular la integral curvilínea:

$$\int_C xy^2\,dx - x^2y\,dy$$

a) $+1$ ☐

b) -1 ■

c) 2 ☐

d) $-1/2$ ☐

Respuesta: Aplicando el teorema de Green:

$$I = \int_C xy^2\,dx - x^2y\,dy = -4\iint_D xy\,dxdy = -4\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy = -1\,.$$

---

4. Calcular el flujo Φ del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$$

a través de la superficie S, siendo:

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

orientada hacia el exterior.

$$\Phi =$$

Respuesta: Por el teorema de Gauss,

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dxdydz\,; \quad \nabla\cdot\boldsymbol{F} = 3(x^2+y^2+z^2)\,.$$

Cambiando a coordenadas esféricas, tenemos:

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} 3\rho^4\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi d\rho d\theta = 3\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1[-\cos\varphi]_0^{\pi} = \frac{12\pi}{5}\,.$$

---

5. Calcular la circulación $I = \int_C \boldsymbol{F}$ del campo vectorial $\boldsymbol{F} = \big(5y, 3x, z^4\big)$ donde C es la curva intersección de la superficie $z = x^2+y^2+4x+4y+8$ con el plano $z = 5$, recorrida de modo que su proyección sobre el plano XY se recorra en sentido antihorario.

$$I =$$

Respuesta: Sea $\mathcal{S}$ la superficie circular limitada por la curva C. Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{S}}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{\sigma}\,; \quad \nabla\times\boldsymbol{F} = -2\boldsymbol{k} = (0,0,-2)\,.$$

La curva C se proyecta en el plano XY en la curva:

$$x^2+y^2+4x+4y+8 = 5 \quad\Rightarrow\quad (x+2)^2+(y+2)^2 = 5\,,$$

que es una circunferencia de radio $\sqrt{5}$. Por tanto,

$$I = \iint_{\mathcal{S}}(0,0,-2)\cdot(0,0,1)\,d\sigma = -2\iint_{\mathcal{S}} d\sigma = -2A(\mathcal{S}) = -10\pi\,.$$

$$I = -10\pi\,.$$

Problema 1

Sea Γ la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

y $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial:

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\frac{2y - 1}{(2x-1)^2 + (2y-1)^2}, \frac{-2x + 1}{(2x-1)^2 + (2y-1)^2} \right).$$

1. Calcúlese la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de Γ recorrida en sentido antihorario.
2. Calcúlese la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la rama de Γ situada bajo la bisectriz y que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$.

Sea $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2)$ un campo vectorial plano de clase C^1 en su dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Se cumple además la igualdad:

$$\frac{\partial G_1(x.y)}{\partial y} = \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in D \tag{13}$$

Sean $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in D$. Razónese, mediante demostración o contraejemplo, sobre la validez de la afirmación siguiente:

La circulación de $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ es independiente del camino, siempre y cuando este esté contenido en D.

Respuesta:

1. Si atendemos en primer lugar al campo, observamos que su dominio de definición es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1/2, 1/2)\}$. La curva encierra en su interior geométrico el punto $A := (1/2, 1/2)$, ya que para $x = y = 1/2$ se tiene

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{4} < 1 = 4xy$$

Da la impresión de que parametrizar la curva y calcular la circulación directamente, aplicando la definición, conduce a una integral sumamente complicada; por tanto, si se desea calcular la circulación aplicando el teorema de Green hay que sortear de algún modo el punto singular. Denotemos $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ y calculemos las derivadas parciales de las componentes del campo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(2x-1)^2 - 2(2y-1)^2}{\left[(2x-1)^2 + (2y-1)^2\right]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{14}$$

Este resultado nos permite asegurar que la circulación de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de dos curvas cualesquiera simples, cerradas y recorridas ambas de la misma forma (sentido horario u opuesto) que encierren el punto singular coincide. Elegimos la circunferencia C de ecuación $(2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 1$, recorrida en sentido positivo; entonces:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_C (2y-1)dx + (-2x+1)dy = -4 \iint_{\text{int C}} dxdy = -4A(\text{int C}),$$

La circunferencia C tiene radio $1/2$ por tanto encierra un área igual a $\pi/4$, se concluye que la circulación pedida es

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\pi.$$

La integral de línea a lo largo de la circunferencia también puede calcularse directamente, parametrizamos así:

$$2x-1=\cos t,\quad 2y-1=\operatorname{sen} t,\qquad 0\le t\le 2\pi,$$

de esta forma el sentido de recorrido es antihorario. las componentes del vector tangente son:

$$2x'(t)=-\operatorname{sen} t,\quad 2y'(t)=\cos t$$

y por tanto la integral queda:

$$\int_C (2y-1)dx+(-2x+1)dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen}^2 t-\cos^2 t)\,dt=-\pi.$$

Para la realización del ejercicio no es necesario identificar la curva, si bien es conveniente cerciorarse de que es cerrada y simple. Es fácil estudiarla si se representa en coordenadas polares, $\rho^2=2\operatorname{sen}2\theta$, $0\le\theta\le\pi/2$: es un lóbulo de lemniscata simétrico respecto de la bisectriz (Figura 3).



Figura 3: Arco de curva $\Gamma\equiv(x^2+y^2)^2=4xy$, $x,y\ge 0$ y circunferencia C

2. Denotemos por Γ_0 la rama de Γ situada en $x\ge y$ de origen $(0,0)$ y extremo final $(1,1)$. La igualdad probada en (14) nos permite asegurar que $\boldsymbol{F}$ es conservativo en abiertos del plano simplemente conexos y que excluyan $(1/2,1/2)$. En estas condiciones la circulación es independiente del camino y podemos sustituir Γ_0 por una línea poligonal $\mathcal{P}$ formada por los segmentos parametrizados $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definidos por $\boldsymbol{r}_1(t)=(t,0)$ y $\boldsymbol{r}_2(t)=(1,t)$.

$$\int_{\Gamma_0} P\,dx+Q\,dy=\int_{\mathcal{P}} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int_0^1 P(t,0)\,dt+\int_0^1 Q(1,t)\,dt=2\int_0^1\frac{-1}{(2t-1)^2+1}dt$$

Hacemos el cambio $u=2t-1,\ du=2dt,\ t\in[0,1]\Rightarrow u\in[-1,1]$,

$$=-\int_{-1}^1\frac{du}{u^2+1}=-2\operatorname{arc\,tg} u\big|_0^1=-2\,\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que

$$\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-\frac{\pi}{2}.$$

Alternativamente, puede calcularse un potencial escalar que sea válido en un conjunto simplemente conexo que excluya el punto $(1/2,1/2)$. Para facilitar la descripción de dicho potencial vamos a excluir también del dominio el punto $(1/2,0)$.

Integremos $P(x,y)$, primera componente de $\boldsymbol{F}$, respecto de x:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{2y-1} + K(y). \tag{15}$$

Si derivamos respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) + K'(y)$$

por tanto K es constante. Este potencial es válido siempre que $2y-1 \neq 0$; es decir, en cada uno de los dos semiplanos en los cuales la recta $2y-1=0$ *separa* el plano. Necesitamos atravesar la recta ya que cada uno de los puntos que queremos unir está a un lado, $(0,0)$ está en $2y-1<0$ y $(1,1)$ está en $2y-1>0$. El potencial que buscamos tiene que ser continuo, escogemos (15) con $K=0$ en $y<1/2$ y lo extendemos con continuidad. Si $2x-1>0$ e $y\to 1/2^-$ se tiene $U(x,1/2^-) = -\pi/4$, entonces para $y>1/2$ tenemos que escoger una constante C de forma que U sea continuo:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{2y-1} + C,\ y > \frac{1}{2}$$

Tomamos el límite cuando $2x-1>0$ para $y\to 1/2^+$ y se tiene $U(x,1/2^+) = \pi/4 + C$, por tanto para que haya continuidad tenemos que elegir $C=-\pi/2$. En definitiva:

$$U(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{2y-1}, & y<\frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{2y-1} - \dfrac{\pi}{2}, & x>\frac{1}{2},\ y>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Con ayuda de este potencial,

$$\int_{\Gamma_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = U(1,1) - U(0,0) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}.$$

La afirmación

La circulación de $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ es independiente del camino, siempre y cuando este esté contenido en D.

es obviamente falsa ya que el campo puede no ser conservativo en todo su dominio. Sirve como contraejemplo tomar $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}$ las curvas que unen $\boldsymbol{v}=(0,0)$ y $\boldsymbol{w}=(1,1)$ por cada una de las ramas de lemniscata; llamemos Γ_1 a la rama que une dichos puntos por encima de la bisectriz,entonces $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^-$,

$$\begin{aligned} -\pi = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_1^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \\ &= -\frac{\pi}{2} - \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \Rightarrow \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Observación: La falsedad de la afirmación no se demuestra argumentando que se carece de condiciones suficientes; ese argumento sirve para ***conjeturar*** la falsedad que se comprueba de forma fehaciente dando un contraejemplo. Para que dicho contraejemplo sea correcto hay que dar un campo $\boldsymbol{G}$ que cumpla (13) en su dominio D, que también ha de especificarse, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, dos caminos que los tengan por extremos a lo largo de los cuales la circulación de $\boldsymbol{G}$ sea distinta.

Problema 2

a) Se pide calcular el volumen del dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ encerrado por la superficie Σ de ecuación:

$$y^2 + z^2 = (1 - x^2)^3 \,.$$

b) Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{F} = \left[\frac{x}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} + x^2 \right] \boldsymbol{i} + \left[\frac{y}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} + 3y^2 \right] \boldsymbol{j} + \left[\frac{z}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} + 5z \right] \boldsymbol{k} \,,$$

se pide calcular su flujo a través de la superficie Σ orientada por el vector normal saliente.

Respuesta:

a) Se considera la curva Γ de ecuación $y^2 = (1-x^2)^3$ en el semiplano $y \geq 0$ (Figura 4).

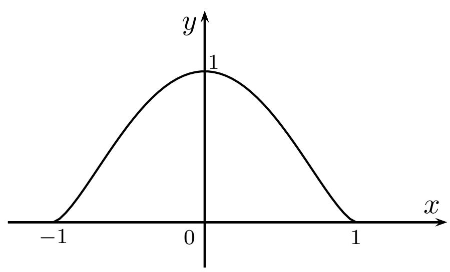


Figura 4: Curva $y^2 = (1-x^2)^3$ en el semiplano $y \geq 0$

La superficie Σ se genera (Figura 5) al hacer girar Γ una vuelta completa en torno al eje OX. Despejamos x en la región $x \geq 0$:

$$1 - x^2 = y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - y^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1 - y^{2/3}} \,.$$

El volumen engendrado es

$$\begin{aligned}
V(A) &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 y x(y) \, \mathrm{d}y = 4\pi \int_0^1 y \sqrt{1 - y^{2/3}} \, \mathrm{d}y \qquad \begin{pmatrix} y = \operatorname{sen}^3 t \quad \Rightarrow \\ \mathrm{d}y = 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t \, \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= 4\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cos t \, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t \, \mathrm{d}t = 12\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= 6\pi \, \mathrm{B}\left(3, \frac{3}{2}\right) = 6\pi \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = 6\pi \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{32\pi}{35} \,.
\end{aligned}$$

Método alternativo.

Podemos también calcular el volumen integrando "por rodajas". Sea A_λ la sección obtenida cortando

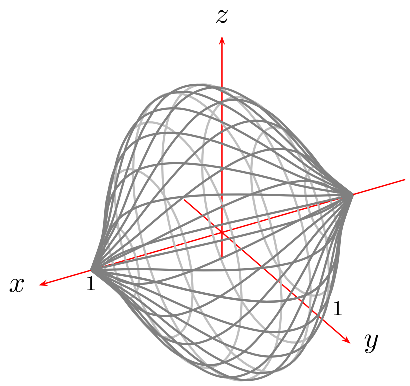


Figura 5: Superficie de ecuación $(x^2-1)^3+y^2+z^2=0$

el dominio A por el plano $x=\lambda\in[-1,1]$. Utilizando la simetría respecto del plano $x=0$ se tiene

$$\begin{aligned}
V(A) &= 2\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \iint_{A_x} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\int_0^1 \text{Área}(A_x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 (1-x^2)^3\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^1 (1-3x^2+3x^4-x^6)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[x-x^3+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{32\pi}{35}\,.
\end{aligned}$$

b) Para simplificar notaciones, hacemos:

$$\eta := (x^2+2y^2+3z^2)^{1/2}\,.$$

Se tiene:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+2y^2+3z^2)^{1/2}} = \frac{x}{\eta}\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{2y}{\eta}\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{3z}{\eta}\,.$$

Descomponemos el campo $\boldsymbol{F}$ en la suma $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}$ siendo:

$$\boldsymbol{G} = P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k} := \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}}\,, \qquad \boldsymbol{H} := x^2\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+5z\boldsymbol{k}\,.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{G} &= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\eta^6}\left(\eta^3-3x^2\eta+\eta^3-6y^2\eta+\eta^3-9z^2\eta\right) \\
&= \frac{1}{\eta^6}\left(3\eta^3-3\eta\eta^2\right) \equiv 0\,.
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{S}$ la superficie del elipsoide dado por $x^2+2y^2+3z^2=1$ y sea E el dominio encerrado por $\mathcal{S}$. Como $\boldsymbol{G}$ es solenoidal y tiene un único punto singular en el origen, su flujo a través de la superficie Σ

coincide con el flujo a través de $\mathcal{S}$, orientadas ambas por el vector normal saliente, luego:

$$\begin{aligned}\Phi_1 := &\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\mathcal{S}^+} \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\mathcal{S}^+} (x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \\ &\text{(ya que el denominador de } \boldsymbol{G} \text{ es igual a 1 en todo punto de } \mathcal{S}) \\ = &\iiint_E \underbrace{\mathrm{div}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}_{\equiv 3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3V(E) = 3\,\frac{4}{3}\,\pi\,\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\,.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Phi_2 := &\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma^+} (x^2\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+5z\boldsymbol{k})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iiint_A \mathrm{div}(x^2\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+5z\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = &\iiint_A (2x+6y+5)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\underbrace{\iiint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{=0} + 6\underbrace{\iiint_A y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{=0} + 5\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = &\, 5V(A) = 5\,\frac{32\pi}{35} = \frac{32\pi}{7}\,,\end{aligned}$$

donde hemos usado que la integral triple de x es nula por ser el integrando impar en x y el dominio A simétrico respecto del plano $x = 0$. Análogo razonamiento sirve para la integral triple de y. Por tanto,

$$\Phi := \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} + \frac{32\pi}{7}\,.$$